Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas:

3º B de ESO

TEORÍA y PROBLEMAS
FOTOCOPIABLE

LibrosMareaVerde.tk
www.apuntesmareaverde.org.es

ÍNDICE

I.S.B.N. - 13: 978-84-697-0275-8

I.S.B.N. - 10: 84-697-0275-0

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Textos Marea Verde

CAPÍTULO 1: NÚMEROS RACIONALES. Matemáticas 3º B de ESO

0. TE CONVIENE RECORDAR

0.1. Prioridad de las operaciones

Cuando no hay paréntesis que nos indiquen qué operación hacer primero o en operaciones dentro de un paréntesis se llegó a un acuerdo para saber como actuar. A saber:

1º Se resuelven los paréntesis interiores.

Si no hay paréntesis o dentro de un paréntesis haremos:

2º Las potencias y las raíces

3º Las multiplicaciones y divisiones.

4º Las sumas y restas.

Se deben evitar:

Expresiones del tipo 1 – 100 : 5 · 5, donde no está claro qué hacer (la multiplicación y división tienen igual prioridad). Se deben poner paréntesis para indicar cual hacer primero. La expresión de arriba puede ser:

$$1 - (100 : 5) \cdot 5 = -99 \text{ o bien } 1 - 100 : (5 \cdot 5) = -3.$$

De todas formas, si te la encuentras, harás:

5º Si hay varias operaciones con igual prioridad se harán de izquierda a derecha.

Ejemplos:

- (5 – 7) · 10 – 8   No podemos hacer 10 – 8 (bueno sí puedes, pero no debes)

Primero el paréntesis➔ –2 · 10 – 8   Después el producto➔ –20 – 8 Por último la resta➔ –28

- $10 - 2 \cdot 3^2 = 10 - 2 \cdot 9 = 10 - 18 = -8$. Aquí está prohibido hacer 10 – 2 y hacer 2·3.
- $3 \cdot (-2 + 4)^2 - 8 - 5 \cdot 2^2 = 3 \cdot 2^2 - 8 - 5 \cdot 4 = 12 - 8 - 20 = -16$
- -10^2 vale –100 ya que primero se hace la potencia y además el signo menos no está elevado a 2. Sin embargo $(-10)^2$ sí que vale +100.
- $-10^2 = -10 \cdot 10 = -100$
- $(-10)^2 = (-10) \cdot (-10) = +100$
- $\sqrt{9}\cdot 25 = 3 \cdot 25 = 75$. Primero se hace la raíz.
- $10 - 9x$ no es $1x$ puesto que no puede hacerse la resta bajo ningún concepto.

Ten en cuenta que esta prioridad es válida siempre, para operaciones con todo tipo de números u otros objetos (por ejemplo: polinomios). Merece la pena sabérsela, ¿no?

0.2. Uso de paréntesis

Los paréntesis nos indican las operaciones que se tienen que hacer primero. De hecho lo primero que haremos serán los **paréntesis interiores** y seguiremos **de dentro hacia fuera**. Es como vestirse: primero te pones la camiseta, luego el jersey y después la cazadora. Es complicado hacerlo al revés. Por ello, antes de ponerte a calcular a lo loco, mira toda la expresión para ver qué se hace primero.

- Debe haber tantos paréntesis abiertos como cerrados, en caso contrario se dice que "los paréntesis no están bien balanceados".
- Si algo multiplica a un paréntesis no es necesario poner el símbolo "·".

Ejemplos:

- $2 \cdot (2 - 2 \cdot (2 - 2 \cdot 2)) = 2 \cdot (2 - 2 \cdot (2 - 4)) = 2 \cdot (2 - 2 \cdot (-2)) = 2 \cdot (2 + 4) = 2 \cdot 6 = 12$
- $2(3 - 2) = 2 \cdot 1$
- $(2 - 3)(6 - 4) = -1 \cdot 2 = -2$
- Si queremos dividir entre 2 el resultado de hacer 75 – 90 *no pondremos esto 75 – 90 : 2*, aquí el 2 sólo divide a 90. Escribiremos (75 – 90) : 2

Los paréntesis se utilizan para meter argumentos de funciones.

Por ejemplo:

- Si en un programa o en la calculadora queremos hacer la raíz de $100 \cdot 3^4$, escribiremos *raíz*(100*3⁴).

0.3. Operaciones con enteros

Recordamos lo más importante:

Regla de los signos para la suma:

La suma de 2 números positivos es positiva. *Ejemplo:* +5 + 7 = +12

La suma de 2 números negativos es negativa. *Ejemplo:* –10 – 17 = –27

Se pone el signo –, y se suman sus valores absolutos.

Ejemplo:

Suma	+	–
+	+	>
–	>	–

- Si pierdo 10 y después pierdo otros 17, he perdido 27

La suma de un número positivo con otro negativo tendrá el signo del mayor en valor absoluto.

Ejemplo:

- $-7 + 15 = +8$; $+8 + (-20) = 8 - 20 = -12$

Se pone el signo del más grande (en valor absoluto) y se restan.

Ejemplo:

- Si pierdo 7 y después gano 15, he ganado 8 (son mayores las ganancias que las pérdidas).

Ejemplo:

- Si gano 8 pero después pierdo 20, he perdido 12 (son mayores las pérdidas).

Regla de los signos para la multiplicación (y la división):

- Positivo x Positivo = Positivo
- Positivo x Negativo = Negativo x Positivo = Negativo
- Negativo x Negativo = Positivo.

x	+	–
+	+	–
–	–	+

Ejemplos:

- $+2 \cdot (-7) = -14$. Si recibo de herencia 2 deudas de 7€, tengo una deuda de 14€.
- $-2 \cdot (-7) = +14$. Si me quitan 2 deudas de 7 €, ¡he ganado 14 €!

Ahora algo de matemáticas serias, que ¡ya estamos en 3º!

Demostración rigurosa de que "$0 \cdot x = 0$ para todo x" y de que " $(-1) \cdot (-1) = +1$"

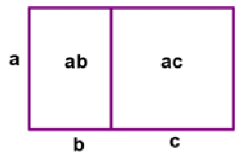
Para ello vamos a utilizar 4 propiedades de los números que conoces:

1ª) $a + 0 = a$ para todo número a (0 es el elemento neutro de la suma)

2ª) La propiedad distributiva: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

3ª) $1 \cdot a = a$ para todo número a (1 es el elemento neutro del producto)

4ª) $-a$ es el opuesto de $+a$, es decir $-a + a = a + (-a) = 0$



Demostramos "$0 \cdot x = 0$ para todo número x":

Como $a - a = 0$, por la propiedad distributiva: $x(a - a) = x \cdot 0 = xa - xa = 0$

Demostramos que "$(-1) \cdot (-1) = +1$":

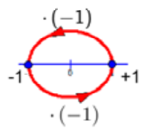
$(-1) \cdot (-1 + 1) = (-1) \cdot 0 = 0$; pero por la propiedad distributiva

$(-1) \cdot (-1 + 1) = (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 = (-1) \cdot (-1) + (-1)$.

Luego $(-1) \cdot (-1) + (-1) = 0$.

Si sumamos 1 en ambos miembros: $(-1) \cdot (-1) + (-1) + 1 = +1$ ➔

$(-1) \cdot (-1) + 0 = +1$ ➔ $(-1) \cdot (-1) = +1$



Actividades resueltas

- *Calcula paso a paso:* $(((-15 - 5 \cdot (-20 - 6)) : (15 - 4^2)) + 5 - 4 \cdot 2) \cdot (-10)$

Calculamos en primer lugar $-20 - 6 = -26$; $4^2 = 16$ y $4 \cdot 2 = 8$ y nos queda: $(((-15 - 5 \cdot (-26)) : (15 - 16)) + 5 - 8) \cdot (-10) =$ $(((-15 + 130) : (-1)) - 3) \cdot (-10) = ((115 : (-1)) - 3) \cdot (-10) = (-115 - 3) \cdot (-10) = -118 \cdot (-10) = +1180$

Actividades propuestas

1. Calcula:

a) $-20 + 15$ b) $-2 \cdot (-20 + 15)$ c) $-20 : (10 - 2(-20 + 15))$ d) $(-80 -20 : (10 - 2(-20 + 15))) \cdot (3 - 2 \cdot 3^2)$

2. Calcula:

a) $-10 + 20 : (-5)$ b) $(-10 + 20) : (-5)$ c) $-100 : ((-20) : (-5))$ d) $(-100 : (-20)) : (-5)$ e) $\sqrt{36 \cdot 4}$

3. Calcula:

a) $3-(4\cdot3-2\cdot5)^2-(3-5)^3$ b) $5-3^2-2\cdot(-5)-(7-9)^2$

c) $7-2\cdot(3-5)^2+2\cdot(-3)+8-(-2)^2$ d) $2-(2\cdot3-3\cdot4)^2-(2-4)^3$

1. NÚMEROS RACIONALES

1.1. Definición

Los **números racionales** son todos aquellos números que ***pueden*** expresarse mediante una fracción de números enteros. Es decir, el número r es **racional** si $r = \dfrac{a}{b}$, con a, b números enteros y $b \neq 0$.

Una fracción es una división indicada, así $\dfrac{7}{3} = 7 : 3$, pero la división no se realiza hasta que lo necesitemos. Hay muchas ocasiones en las que es mejor dejar las operaciones indicadas. Con un ejemplo bastará:

Prueba a hacer la división 1,142857142857… : 8, ¿difícil, no?, sin embargo, $\frac{8}{7}:8=\frac{1}{7}$ es algo más sencilla y además **exacta.**

El nombre "racional" viene de "***razón***", que en matemáticas significa división o cociente.

El conjunto de los números racionales se representa por $\mathbb{Q}$.

Un número racional tiene infinitas representaciones en forma de fracción.

Así: $\frac{1}{3}=\frac{3}{9}=\frac{6}{18}=\ldots$ son infinitas fracciones que representan al mismo número racional, se les llama "equivalentes" puesto que tienen igual valor numérico. Si hacemos las divisiones en el ejemplo todas valen 0,333… que es su expresión decimal.

Los números "*enteros*" son racionales puesto que se pueden expresar mediante una fracción, por ejemplo $-2=\frac{-8}{4}$

Todo número racional tiene un representante que es su **fracción irreducible**, aquella que tiene los números más pequeños posibles en el numerador y el denominador. A esta fracción se llega a partir de cualquier otra dividiendo el numerador y denominador por el mismo número. Si se quiere hacer en un solo paso se dividirá entre el Máximo Común Divisor (M.C.D.) del numerador y el denominador. Por ejemplo: $\frac{60}{80}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$ donde hemos dividido primero entre 10 y después entre 2, pero podíamos haber dividido entre 20 directamente ya que 20 es el MCD(60, 80). Por tanto $\frac{3}{4}$ es la fracción irreducible y por ello la que representa al número racional que tiene otras muchas formas de fracción como 60/80 = 6/8 = 30/40 = 12/16 = 9/12 = 15/20, = 18/24 = 21/28 = 24/32 = 27/36 … y por expresión decimal 0,75

1.2. Fracciones equivalentes

Dos fracciones son equivalentes si se verifican las siguientes condiciones (todas equivalentes):

Al hacer la división obtenemos la misma **expresión decimal.** Ésta es la definición.

Ejemplo:

- 4 : 5 = 8 : 10 = 0,8 luego $\frac{4}{5}\ y\ \frac{8}{10}$ son equivalentes y puede escribirse $\frac{4}{5}=\frac{8}{10}$.

Los **productos cruzados son iguales**: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow a\cdot d=b\cdot c$

Es fácil de demostrar, multiplicamos a ambos lados del igual por *b* y por *d* que $\frac{a}{b}\cdot b\cdot d=\frac{c}{d}\cdot b\cdot d$, como *b* : *b* = 1 y *d* : *d* = 1 nos queda *a*·*d* = *c*·*b*.

Por ejemplo:

- $\frac{12}{8}=\frac{6}{4}$ puesto que 12 · 4 = 8 · 6 = 48

Al simplificar las fracciones se llega a la misma fracción irreducible.

Si A = B y C = B a la fuerza A = C

Ejemplo:

- $\frac{80}{60}=\frac{4}{3};\frac{12}{9}=\frac{4}{3}\ luego\ \frac{80}{60}=\frac{12}{9}$

Se puede pasar de una fracción a otra multiplicando (o dividiendo) el numerador y el denominador por un mismo número.

Ejemplo:

- $\frac{6}{4}=\frac{24}{16}$ pues basta multiplicar el numerador y el denominador de la primera por 4 para obtener la segunda..

En general $\frac{a}{b}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n}$

Reducción a común denominador

Con objeto de comparar 2 o más fracciones (ver cuál es mayor) y también para poder sumarlas o restarlas es importante obtener fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador.

Primero un *ejemplo* y después la teoría:

Autor: Paco Moya
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

- Quiero saber si $\frac{5}{6}$ es mayor que $\frac{6}{7}$ sin hacer la división.

Buscamos un múltiplo común de 6 y de 7 (si es el mínimo común múltiplo mejor, pero no es imprescindible), 42 es múltiplo de 6 y de 7. Lo escribimos como nuevo denominador para las 2 fracciones: $\frac{5}{6}=\frac{\ }{42};\frac{6}{7}=\frac{\ }{42}$

Ahora calculamos los nuevos numeradores: como el 6 lo he multiplicado por 7 para llegar a 42 pues el 5 lo multiplicamos también por 7 para obtener una fracción equivalente $\frac{5}{6}=\frac{5\cdot 7}{6\cdot 7}=\frac{35}{42}$ y como el 7 lo he multiplicado por 6, el 6 también lo multiplico por 6 obteniendo $\frac{6}{7}=\frac{6\cdot 6}{7\cdot 6}=\frac{36}{42}$, ahora está claro cuál de las 2 es mayor ¿no?

Para obtener fracciones equivalentes a $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ con el **mismo denominador** buscamos un múltiplo común de *b* y *d* (si es el mínimo común múltiplo mejor) que llamamos *m* y hacemos: $\frac{a\cdot\frac{m}{b}}{m}$ y $\frac{c\cdot\frac{m}{d}}{m}$.

1.3. Ordenación de fracciones

Para ordenar una serie de fracciones existen varios procedimientos:

i) Hacer las divisiones y comparar las expresiones decimales.

Este procedimiento es el más fácil pero no el más rápido (salvo que tengas calculadora).

Por ejemplo:

- Nos piden que ordenemos de menor a mayor las siguientes fracciones:

$$\frac{20}{19};\frac{21}{20};\frac{-20}{19};\frac{-21}{20};\frac{29}{30};\frac{28}{29}$$

Hacemos las divisiones que dan respectivamente: 1,0526…; 1,05; –1,0526…; –1,05; 0,9666… y 0,9655…

Mirando los números decimales sabemos que:

$$\frac{-20}{19}<\frac{-21}{20}<\frac{28}{29}<\frac{29}{30}<\frac{21}{20}<\frac{20}{19}$$

Recuerda que

Los números negativos son siempre menores que los positivos y además entre números negativos es menor el que tiene mayor valor absoluto (–4 < –3).

ii) Usar la lógica y el siguiente truco: Para fracciones positivas $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}\Leftrightarrow a\cdot d<b\cdot c$.

Ejemplo:

- $\frac{8}{9}<\frac{10}{11}$ ya que 8·11 < 9·10.

Demostración:

8·11 < 9·10 $\Rightarrow \frac{8\cdot 11}{9\cdot 11}<\frac{9\cdot 10}{9\cdot 11}\Rightarrow\frac{8}{9}<\frac{10}{11}$; hemos dividido entre 9·11. Y simplificado.

Y al revés: $\frac{8}{9}<\frac{10}{11}\Rightarrow\frac{8\cdot 9\cdot 11}{9}<\frac{10\cdot 9\cdot 11}{11}\Rightarrow 8\cdot 11<10\cdot 9$; hemos multiplicado por 9·11 y simplificado.

No es necesario que uses la demostración, la ponemos sólo para que veas que en matemáticas “casi” todo tiene su explicación.

¿Y lo de usar la lógica qué es?

Empezamos por lo más fácil,

Ejemplo:

- Comparar $\frac{20}{19}\,y\,\frac{28}{29}$

$\frac{20}{19} > 1$ puesto que 20 > 19. Pero $\frac{28}{29} < 1$ ya que 28 < 29. Está claro que la segunda es menor.

- Un poco más difícil, comparamos $\frac{20}{19}\, y\, \frac{21}{20}$:

$$\frac{20}{19} = \frac{19+1}{19} = \frac{19}{19} + \frac{1}{19} = 1 + \frac{1}{19}$$

$\frac{21}{20} = \frac{20+1}{20} = \frac{20}{20} + \frac{1}{20} = 1 + \frac{1}{20}$. Pero ¿qué es mayor 1/19 ó 1/20?

Es mayor 1/19 y por tanto es mayor la primera. Piensa que si dividimos una pizza en 19 trozos iguales éstos son mayores que si la dividimos en 20 trozos iguales.

Si *a* y *b* son positivos $\Rightarrow\ a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

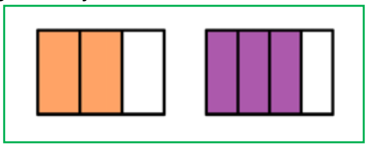
- Así que 1/3 > 1/4 por ejemplo.

Más difícil todavía:

- Comparamos $\frac{19}{20}\, y\, \frac{18}{19}$. Ahora 19/20 = 1 – 1/20 y 18/19 = 1 – 1/19.

Como 1/19 > 1/20 ahora la fracción mayor es 19/20 puesto que le falta menos para llegar a 1.
Con números más sencillos se entiende mejor: 2/3 < 3/4 puesto que a 2/3 le falta 1/3 para llegar a 1, y a 3/4 sólo 1/4.

Importante: Si *a* y *b* son positivos entonces a > b $\Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.



iii) Reducir a común denominador y comparar los numeradores:

- Nos piden que ordenemos de mayor a menor las siguientes fracciones:

$$\frac{5}{6};\frac{7}{8};\frac{-9}{4};\frac{-7}{3};\frac{-2}{1}$$

Primero buscamos un número que sea múltiplo de 6, de 8, de 4 y de 3 (si es el mínimo común múltiplo mejor que mejor). Encontramos el 24 que es múltiplo de todos ellos. Lo ponemos como nuevo denominador de todas las fracciones y calculamos los nuevos numeradores para que las fracciones sean equivalentes: 24:6 = 4 luego el 6 hay que multiplicarlo por 4 para llegar a 24, lo mismo hacemos con el 5, 5·4 = 20 es el nuevo numerador. Así con las demás.
Después comparamos los numeradores y obtenemos que:

$$\frac{7}{8} > \frac{5}{6} > -2 > \frac{-9}{4} > \frac{-7}{3}$$

ya que 21 > 20 > -48 > –54 > –56

$$\frac{5}{6} = \frac{5\cdot 4}{6\cdot 4} = \frac{20}{24}$$
$$\frac{7}{8} = \frac{7\cdot 3}{8\cdot 3} = \frac{21}{24}$$
$$\frac{-9}{4} = \frac{-9\cdot 6}{4\cdot 6} = \frac{-54}{24}$$
$$\frac{-7}{3} = \frac{-7\cdot 8}{3\cdot 8} = \frac{-56}{24}$$
$$\frac{-2}{1} = \frac{-2\cdot 24}{1\cdot 24} = \frac{-48}{24}$$

1.4. Representación en la recta numérica

Ésta es la recta numérica, en ella todo número real tiene un lugar exacto.
Recordamos cosas que ya sabes:

- Para dibujarla sólo se pueden tomar dos decisiones: donde colocamos el 0 y donde colocamos el 1, es decir, dónde está el origen y cuál es el tamaño de la unidad.
- Las unidades han de ser siempre del mismo tamaño.
- Los números positivos van a la derecha del 0 y los negativos a la izquierda.
- El 0 no es ni positivo ni negativo.
- La recta numérica no tiene ni principio ni fin. Nosotros sólo podemos dibujar una “pequeña” parte.
- Dados 2 números *a*, *b* se cumple: *a* < *b* si *a* está a la izquierda de *b* y viceversa.

Así por ejemplo:

1 < 3; –1 < 1; –4 < –2

Todo número racional tiene una posición predeterminada en la recta numérica. Las infinitas fracciones equivalentes que forman un número racional caen en el mismo punto de la recta. Así que 2/3 y 4/6, que son el mismo número caen en el mismo punto.

Veamos como representar las fracciones de forma exacta.

Fracción propia, fracción impropia y forma mixta

Fracción propia: Se dice de la fracción *a/b* donde ***a*** < ***b***. Es decir, el numerador es menor que el denominador.

Por ejemplo:

- 4/5 o 99/100.

Si *a* < *b* al hacer la división **la expresión decimal será menor que 1.**

Por ejemplo:

- 4/5 = 4:5 =0,8.

Fracción impropia: Se dice de la fracción *a/b* donde ***a*** > ***b***, numerador mayor que el denominador.

Ejemplo:

- 15/4 o 37/27. Si hacemos la división **la expresión decimal es mayor de 1.** 15/4 = 3,75 y 37/27 = 1,37037037…

Número mixto: Las fracciones impropias pueden escribirse como la suma de un número entero y de una fracción propia.

Así por ejemplo:

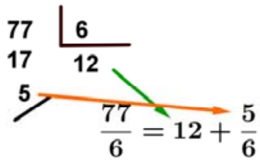
- $\frac{9}{5}=\frac{5+4}{5}=1+\frac{4}{5}$, ésta última es la forma mixta.

En España no es frecuente pero en el mundo anglosajón suele escribirse $1\frac{4}{5}$ que significa lo mismo.

La calculadora científica pasa a forma mixta, investígalo.

La forma rápida y automática de escribir una fracción en forma mixta es la siguiente:

- $\frac{77}{6}$ es impropia pues 77 > 6, para escribirla en forma mixta hacemos la división entera 77 : 6, es decir, sin decimales, nos interesa el cociente y el resto.



El cociente es la parte entera, el resto es el numerador de la fracción y el divisor es el denominador.

Es importante que lo intentes hacer de cabeza (cuando sea razonable), es fácil, por ejemplo:

- 47/6, buscamos el múltiplo de 6 más cercano a 47 por abajo, éste es 7 · 6 = 42, por tanto: 47/6 = 7 + 5/6, puesto que de 42 a 47 van 5. Piénsalo, si nos comemos 47/6 de pizza, nos hemos comido 7 pizzas enteras y además 5/6 de pizza.

Nota:

También es fácil hallar el cociente y el resto con la calculadora, por si tienes prisa.

Para 437/6, haz la división 437 : 6 , obtienes 72,83333…, la parte entera es 72, sólo nos queda calcular el resto. Tenemos 2 caminos:

1º) Haces 437 – 72 · 6 = 5 y listo.

2º) Multiplica la parte decimal por el divisor: 0,8333… · 6 = 5, que es el resto. Si es necesario redondea (0,8333 · 6 = 4,9998 que redondeamos a 5).

Sólo te permitimos hacer esto si sabes por qué funciona, si no lo sabes, olvídalo.

Si la fracción es negativa procedemos de la siguiente forma:

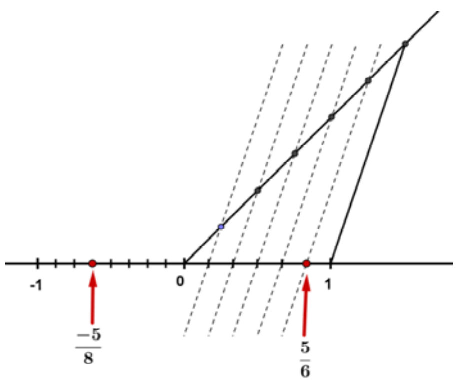
- $\frac{-19}{5}=-\left(3+\frac{4}{5}\right)=-3-\frac{4}{5}$, ya que la división da 3 de cociente y 4 de resto.

Representación de fracciones

Si la fracción es propia:

Por ejemplo

- *Representa la fracción* 5/6: El valor está entre 0 y 1, por tanto dividimos la primera unidad en 6 partes iguales y tomamos 5.



En la figura se indica cómo hacerlo de forma exacta usando el *Teorema de Tales*. Trazamos una recta oblicua cualquiera que pase por 0, marcamos con el compás 6 puntos a igual distancia entre sí (la que sea, pero igual). Unimos el último punto con el 1 y trazamos paralelas a ese segmento que pasen por los los puntos intermedios de la recta oblicua (las líneas discontinuas). Estas rectas paralelas dividen el intervalo [0, 1] en 6 partes iguales.

Fíjate que para dividir en 6 partes iguales sólo hay que marcar 5 puntos intermedios a igual distancia, siempre uno menos. Para dividir en 8 partes iguales marcamos 7 puntos intermedios.

Si la fracción es negativa se hace igual pero en el intervalo [–1, 0].

En la figura hemos representado –5/8, hemos dividido el intervalo [–1, 0] en 8 partes iguales y hemos contado 5 empezando en el 0. Asegúrate de entenderlo y si no es el caso pregunta. *Por cierto, la flecha apunta al punto y no al espacio que hay entre ellos.*

Si queremos representar la fracción propia *a/b* **se divide la primera unidad en "*b*" partes iguales y se cuentan "*a*" divisiones.**

En caso de ser negativa se hace igual pero contando desde 0 hacia la izquierda.

Si la fracción es impropia:

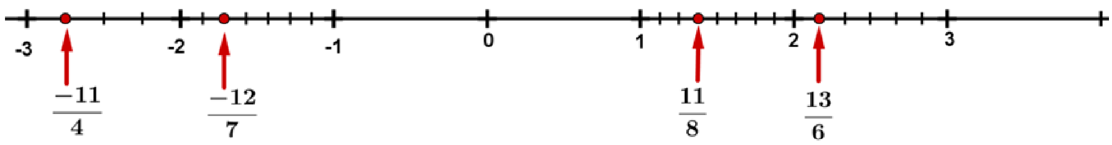
Actividades resueltas

- *Representamos* 13/6.

Lo primero es escribirla en su forma mixta, $\frac{13}{6}=2+\frac{1}{6}$, ahora es fácil representarla, nos vamos al 2, la unidad que va del 2 al 3 la dividimos en 6 partes iguales y tomamos 1 (ver imagen). Igual para $\frac{11}{8}=1+\frac{3}{8}$, nos vamos al 1 y la unidad que va del 1 al 2 la dividimos en 8 partes iguales y tomamos 3.

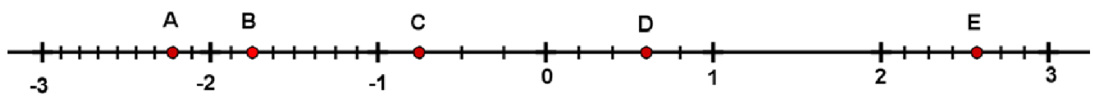
Si la fracción es negativa procedemos así:

- *Representamos* $\frac{-12}{7}=-\left(1+\frac{5}{7}\right)=-1-\frac{5}{7}$, nos vamos al –1, la unidad que va del –1 al –2 la dividimos en 7 partes iguales y contamos 5 hacia la izquierda empezando en –1.
- *Representamos* $\frac{-11}{4}=-\left(2+\frac{3}{4}\right)=-2-\frac{3}{4}$, nos vamos al –2, dividimos en 4 partes iguales y tomamos 3, contando hacia la izquierda y empezando en –2 (ver imagen).



Actividades propuestas

4. Pasa a forma mixta las siguientes fracciones: $\frac{50}{7};\frac{25}{11};\frac{101}{6}$
5. Pasa a forma mixta las fracciones $\frac{-30}{7};\frac{-50}{13};\frac{-100}{21}$
6. Representa en la recta numérica las fracciones: $\frac{1}{5};\frac{3}{7};\frac{-5}{8};\frac{-3}{4}$
7. Pasa a forma mixta y representa las fracciones: $\frac{23}{8};\frac{-23}{8};\frac{180}{50};\frac{-26}{6}$
8. Halla las fracciones que se corresponden con los puntos *A, B, C, D* y *E,* expresando en forma mixta y como fracción impropia las representadas por los puntos *A, B* y *E*.



1.5. Operaciones con fracciones

Vamos a repasar las operaciones con fracciones, en concreto, la suma, la resta, el producto y la división.

Suma y resta de fracciones

La suma y la resta son las operaciones más exigentes puesto que sólo pueden sumarse o restarse cosas iguales. No podemos sumar metros con segundos, ni € con litros. De la misma forma **no pueden sumarse tercios con quintos** ni cuartos con medios. Es decir, no se puede hacer la suma $\frac{5}{6}+\frac{3}{4}$ así tal cual, ya que los sextos y los cuartos son de distinto tamaño.

Pero, ¿habrá alguna manera de sumarlas?, si.

Lo primero es hallar 2 fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador, y entonces ya sí se podrán sumar.

Veamos el ejemplo:

- Un múltiplo de 6 y 4 es 12. Escribimos 12 como nuevo denominador y hallamos los numeradores para que las fracciones sean equivalentes:

$\frac{5}{6}+\frac{3}{4}=\frac{5\cdot 2}{12}+\frac{3\cdot 3}{12}=\frac{10}{12}+\frac{9}{12}=\frac{10+9}{12}=\frac{19}{12}$, los doceavos ya sí se pueden sumar, y el resultado son doceavos.

Otro ejemplo:

- $\frac{13}{6}-\frac{51}{10}+\frac{8}{12}=\frac{13\cdot 10}{60}-\frac{51\cdot 6}{60}+\frac{8\cdot 5}{60}=\frac{130-306+40}{60}=\frac{-136}{60}=\frac{-34}{15}$

Hemos hallado un múltiplo de 6, de 10 y de 12 (si es el mínimo común múltiplo mejor que mejor), se escribe como denominador común y hacemos 60 : 6 = 10, luego el 13 lo multiplicamos por 10, 60:10 = 6 luego el 51 lo multiplicamos por 6, etc.

Cuando todas las fracciones tienen igual denominador, se suman o restan los numeradores, dejando el mismo denominador. Si es posible se simplifica la fracción resultante.

En los casos en que no sea fácil hallar el mínimo común múltiplo se hace lo siguiente:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}+\frac{c\cdot b}{b\cdot d}=\frac{ad+cb}{bd}$$

Así por ejemplo:

$$\frac{15}{387}+\frac{19}{155}=\frac{15\cdot 155+19\cdot 387}{387\cdot 155}=\frac{9678}{59985}=\frac{3226}{19995}$$

Producto y división de fracciones:

Sorprende que el producto y la división de fracciones sean más sencillos que la suma y la resta.

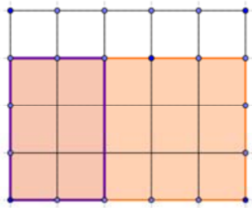
Producto: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$, se multiplican los numeradores entre sí para obtener el numerador de la fracción producto y los denominadores entre sí para determinar el denominador de dicha fracción, fácil ¿no?

Así:

$$\frac{3}{11}\cdot\frac{5}{7}=\frac{3\cdot 5}{11\cdot 7}=\frac{15}{77}$$

¿Por qué las fracciones se multiplican así?

No vamos a demostrar el caso general, con un ejemplo nos bastará.



$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}$ significa dividir en 4 partes iguales y coger 3 (las 3 franjas inferiores de la figura). Ahora debemos hacer 2/5 de lo que nos ha quedado, esas 3 franjas las dividimos en 5 partes iguales y tomamos 2. Como puede verse nos quedan 6 partes iguales de las 20 totales.

$$\frac{17}{15}\cdot\frac{5}{17}=\frac{\cancel{17}\cdot 5}{15\cdot\cancel{17}}=\frac{1\cdot\cancel{5}}{3\cdot\cancel{5}}=\frac{1}{3}$$

A veces conviene hacer la multiplicación con inteligencia:

Antes de multiplicar nos fijamos en que el 17 se puede simplificar (¿para qué vamos a multiplicar por 17 y luego dividir por 17?) y después el 5 puesto que 15=3·5.

Otro ejemplo:

- $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}$ hazla, esperamos que llegues al resultado correcto ya simplificado que es 1/6 ☺

Tenemos algo importante que decirte, no queremos ver esto nunca, nunca:

$\frac{\cancel{7}+3}{\cancel{7}+5}=\frac{3}{5}$ es absolutamente falso (10/12 = 5/6 es lo correcto). Sólo pueden simplificarse si el número está multiplicando en el numerador y en el denominador (si es factor común). Esto tampoco está nada bien.

$$\frac{\cancel{7}\cdot 2+3}{\cancel{7}\cdot 4+5}=\frac{2+3}{4+5}$$

Autor: Paco Moya
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

Fracción inversa:

La fracción inversa de $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$ pues se cumple que $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=\frac{ab}{ab}=1$ que es la definición de inverso.

Ejemplos:

La inversa de 3/4 es 4/3 y la inversa de 2 es 1/2.

División:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

Luego para dividir se multiplica por la inversa de la fracción que divide. $\frac{6}{10}:\frac{9}{15}=\frac{6}{10}\cdot\frac{15}{12}=\frac{2\cdot 3\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 5\cdot 2\cdot 2\cdot 3}=\frac{3}{4}$

También puedes multiplicar y luego simplificar: $\frac{90}{120}=\frac{3}{4}$

Preguntarás que si puedes multiplicar en X, pues dependerá de tu profesor.

Casos curiosos:

- Dividir entre una décima es multiplicar por 10 ya que $a:\frac{1}{10}=\frac{a}{1}\cdot\frac{10}{1}=10a$

Como caso general: dividir entre 1/*a* es multiplicar por *a*.

- Dividir entre un número es como multiplicar por su inverso: *a* : 2 = $a\cdot\frac{1}{2}=\frac{a}{2}$
- *Torres de fracciones:* No te asustes si ves esto $\frac{\frac{6}{10}}{\frac{4}{15}}$, es muy fácil, es lo mismo que $\frac{6}{10}:\frac{4}{15}=\frac{3}{5}\cdot\frac{15}{4}=\frac{3\cdot 3\cdot 5}{5\cdot 4}=\frac{9}{4}$, no olvides que "__" es lo mismo que ":"

Ahora todo junto.

Operaciones combinadas.

Aplicaremos todo lo que "sabemos" sobre prioridad y uso de paréntesis.

Actividades resueltas

- Calcula paso a paso y simplifica:

$$\left(\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{6}\right)\right):\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{14}\cdot\frac{2}{3}\right)$$

Primero hacemos el paréntesis de más adentro y la multiplicación del segundo paréntesis que tiene prioridad sobre la resta.

$$\left(\frac{3}{4}-\left(\frac{3}{6}-\frac{4}{6}\right)\right):\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{7}\right)=\left(\frac{3}{4}-\left(\frac{-1}{6}\right)\right):\left(\frac{7}{14}-\frac{2}{14}\right)=$$

$$=\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{6}\right):\frac{5}{14}=\left(\frac{9}{12}+\frac{2}{12}\right):\frac{5}{14}=\frac{11}{12}\cdot\frac{14}{5}=\frac{154}{60}=\frac{77}{30}$$

La fracción como operador

a) Fracción de un número:

- Nos piden hallar las 3 cuartas partes de 120.

Traducimos: hallar $\frac{3}{4}$ de 120. Este "de" se traduce en matemáticas por un "por", luego:

$$\frac{3}{4}\ de\ 120=\frac{3}{4}\cdot 120=\frac{3\cdot 120}{4}=3\cdot 30=90$$

En general $\frac{a}{b}\ de\ c=\frac{a}{b}\cdot c=\frac{ac}{b}$

b) Fracción de una fracción:

Ejemplos:

$$\frac{10}{6}\ de\ \frac{4}{15}=\frac{10}{6}\cdot\frac{4}{15}=\frac{40}{90}=\frac{4}{9}$$

- Halla las dos quintas partes de las diez doceavas partes de 360.

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{10}{12}\cdot 360=\frac{2\cdot 10\cdot 360}{5\cdot 12}=\frac{20\cdot 360}{60}=20\cdot 6=120$$

c) Problema inverso:

- Me dicen que las tres cuartas partes de un número valen 66. ¿Qué número es?

Está claro que un cuarto será 66 : 3 = 22 y los 4 cuartos son 22·4 = 88

Resumiendo $66\cdot\frac{4}{3}$ = 88

El caso general es: $\frac{a}{b}\cdot x=c\Rightarrow x=c\cdot\frac{b}{a}$, se multiplica el número por la fracción inversa.

Actividades propuestas

9. Halla las cuatro quintas partes de las tres cuartas partes de 12.
10. Las cinco sextas partes de un número son 100, ¿qué número es?

2. APROXIMACIONES Y ERRORES

En la vida cotidiana y también en las Ciencias Aplicadas es necesario trabajar con números aproximados.

Unos ejemplos:

- Queremos comprar un tercio de metro de tela, tenemos que decirle al dependiente cuanto queremos y no vamos a ser tan idiotas como para decirle que nos dé 0,333… metros o 33,333… cm que es lo exacto. Lo normal es pedir 33 cm o 333 mm si somos muy finos.
- Medimos un folio A4 con la regla y nos da 29,7 cm, la regla llega a los mm. Queremos dividirlo en 8 partes iguales, ¿cuánto medirá cada parte?, si hacemos 29,7:8 nos da 3,7125 cm, pero la regla no llega a tanto, será mejor aproximar a 3,7 cm.
- Hacemos un examen con 9 preguntas que valen todas igual. Tenemos 5 bien y las demás en blanco. ¿Qué nota tenemos?, 10·5/9 = 5,555555556 según la calculadora, ¿las ponemos todas?, si lo hacemos estamos suponiendo que somos capaces de distinguir 1 parte de entre 10000 millones de partes iguales del examen. Lo razonable es 5,6 o 5,56 si somos muy pero que muy precisos.
- Resulta curioso y debería ser delito que en las gasolineras se anuncie: Precio del gasoil 1,399 €/litro. Si alguien va y pide un litro exacto, o 2 o 15 no se lo pueden cobrar exactamente puesto que ¡no existen las milésimas de €!, deberían escribir 1,40 €/litro. Es cierto que de esa manera te ahorras 5 céntimos si echas 50 litros pero a ellos les compensa el tema psicológico, la gente poco culta en números ve 1,3 en lugar de 1,4.
- Exactamente lo mismo pasa en los supermercados: merluza 5,99€/Kg. Son trucos baratos que una mente entrenada sabe detectar y actuar en consecuencia. La diferencia entre 6€/Kg y 5,99€/Kg es que te ahorras ¡1 céntimo! si compras 1 Kg, si compras medio, ¿cuánto te ahorras?, ¡nada!, 5,99:2 = 2,995 que redondeado es 3, que es lo que cobran. Aunque bien mirada la oferta no está tan mal, sin compras 5 Kg. de merluza ahorras para comprarte un caramelo, eso sí, tienes que comprar más de medio Kg por vez.

Utilizar demasiadas cifras decimales sin estar seguro de ellas no es sinónimo de precisión sino de torpeza.

2.1. Redondeo.

Te recordamos como se redondean correctamente los números.

- Redondear π a las diezmilésimas: π = 3,1415926535…, la cifra de las diezmilésimas es 5, como la cifra siguiente es 9 que es $\geq$ 5, le sumamos 1 al 5 y pondremos $\pi\approx 3{,}1416$. Fíjate que π está más cerca de 3,1416 que de 3,1415
- Redondear $\sqrt{2}$ a las centésimas: $\sqrt{2}$ =1,41421356…, ahora la cifra siguiente es 4 < 5 luego la dejamos tal cual, $\sqrt{2}\approx 1{,}41$

La regla es: Localizamos la cifra de redondeo, miramos la siguiente cifra (sólo la siguiente), si ésta es menor que 5 dejamos la cifra de redondeo igual, si la cifra siguiente es 5 o mayor que 5 incrementamos en 1 la cifra de redondeo.

Más ejemplos:

- *Redondea* 1,995 a las centésimas ➔ 2,00 y los ceros hay que escribirlos para indicar dónde hemos redondeado.
- 1555555 en los miles ➔ 1556000 donde hay que completar con ceros después de los miles.

- 6,94999 en las décimas → 6,9 sólo hay que mirar el 4

Nota importante: Si el resultado de un problema son € se redondeará siempre en los céntimos.

Otra nota importante: Si queremos dar un resultado con 2 decimales en los pasos intermedios trabajaremos con más decimales, al menos 3 o 4, de lo contrario el resultado no tendrá la precisión que pretendemos, un ejemplo:

- A = 9,65; B = 6,98 y C = 4,99. Queremos hacer $(A \cdot B) \cdot C^2$, si hacemos $A \cdot B$ y redondeamos en las centésimas nos queda 67,36 y si ahora multiplicamos por $4{,}99^2 = 24{,}90$ nos sale 1677,26. El resultado correcto es 1677,20 donde sólo hemos redondeado al final.

2.2. Cifras significativas.

Es el número de cifras "*con valor*" que se utilizan para expresar un número aproximado.

Unos cuantos *ejemplos* y lo entiendes:

- 2,25 tiene 3 cifras significativas; 28,049 tiene 5 cifras significativas.
- 5,00 tiene 3; 4000,01 tiene 6;
- 10000 no sabemos las cifras significativas que tiene, puede ser 1 o 2 o 3 o 4 o 5, nos tienen que decir en qué cifra se ha aproximado. Para este último caso puede recurrirse a la notación científica para decir con precisión el número de cifras significativas, así:
- $1 \cdot 10^4$ tiene una cifra significativa, $1{,}0 \cdot 10^4$ tiene 2 y así hasta $1{,}0000 \cdot 10^4$ que tiene 5.

Consideraciones:

- Las cifras **distintas** de 0 siempre son significativas.
- Los ceros a la izquierda nunca son cifras significativas: 0,0002 tiene una cifra significativa.
- Los ceros en medio de otras cifras distintas de 0 siempre son significativos 2004 tiene 4 cifras significativas.

Más que el número de decimales la precisión de una aproximación se mide por el número de cifras significativas.
No deben utilizarse más cifras de las que requiera la situación.

Actividades propuestas

11. Copia esta tabla en tu cuaderno y redondea con el número de cifras indicado

	Cifras significativas			
Número	1	2	3	4
$\sqrt{10}$				
1/7				
95549	100000			
30000	$3 \cdot 10^4$			
1,9995				2,000
20,55				

2.3. Error absoluto y error relativo

I.- Error absoluto

Se define el **error absoluto** (EA) como EA = $|valor\ real - valor\ aproximado|$.

Las barras verticales se leen "valor absoluto" y significan que el resultado se dará siempre positivo.

Ejemplo:

- Aproximamos 1/3 de litro por 0,33 litros.

$$\text{EA} = \left|\frac{1}{3} - 0{,}33\right| = 0{,}00333... \approx 0{,}0033 \text{ litros}$$

Otro ejemplo:

- Aproximamos 16/6 Kg. con 2 cifras significativas (2,7 Kg.)

$$\text{EA} = \left|\frac{16}{6} - 2{,}7\right| = |-0{,}0333...| \approx 0{,}033 \text{ Kg.}$$

- No deben ponerse demasiadas cifras significativas en el error absoluto, 2 o 3 es suficiente.
- El error absoluto tiene las mismas unidades que la magnitud que se aproxima.

¿Estos errores son grandes o pequeños?, la respuesta es, ¿comparados con qué?

Para ello se define el error relativo que sí nos da una medida de lo grande o pequeño que es el error absoluto.

II.- Error relativo

Para comparar errores de distintas magnitudes o números se define el Error Relativo (ER) como:

$$ER = \frac{EA}{|Valor\ real|}$$

que suele multiplicarse por 100 para hablar de % de error relativo.
Si no se conoce el valor real se sustituye por el valor aproximado (la diferencia normalmente es pequeña).
Calculamos el error relativo para los ejemplos de arriba:

1º) $ER = \frac{0,0033}{1/3} = 0,0099 \Rightarrow 0,99\%$ de ER

2ª) $ER = \frac{0,033}{8/3} \approx 0,0124 \Rightarrow 1,2\%$ de ER

Ahora sí podemos decir que la 1ª aproximación tiene menos error que la 2ª, puesto que el error relativo es menor.

El **error relativo** (ER) **no tiene unidades** y por ello se pueden comparar errores de distintas magnitudes o con distintas unidades.

¿Qué hacer si no se conoce el valor exacto?

En este caso no se puede calcular el error absoluto, sin embargo todos los aparatos de medida tienen un error absoluto máximo.

- Balanzas de baño que miden de 100 g en 100 g su error absoluto máximo es de 50 g.
- Cronómetros que miden centésimas de segundo, su error absoluto máximo será de 0,005 s, media centésima.
- Reglas normales que miden mm, su error absoluto máximo será de 0,5 mm = 0,05 cm = 0,0005 m

A esto se le denomina **cota de error absoluto**.

Actividades resueltas

- Te pesas en una báscula de baño y te marca 65,3 Kg, el error absoluto máximo es de 0,05 Kg (50 g)

  Ahora pesamos un coche en una báscula especial y pesa 1250 Kg con error absoluto máximo de 10 Kg. ¿Qué medida es más precisa?

  Tú ➔ $ER \leq \frac{0,05}{65,3} = 0,00077 \Rightarrow ER \leq 0,077\%$

  Coche ➔ $ER \leq \frac{10}{1250} = 0,008 \Rightarrow ER \leq 0,8\%$

Es mucho más precisa la báscula de baño en este caso. Sin embargo, si en la misma báscula pesamos a un bebé y marca 3,1Kg, el error relativo sale menor o igual que 1,6 % (pruébalo) y ahora la medida de la báscula de baño es mucho menos precisa.

Así que el error depende de la precisión de la máquina y de la medida que hagamos con ella.

Actividades propuestas

12. Prueba que 123,45 con EA = 0,005 y 0,12345 con EA = 0,000005 tienen el mismo ER.

13. Contesta Verdadero o Falso y justifica tu respuesta:

a) Para una misma máquina de medir el error cometido es menor cuanto más pequeña sea la medida.
b) No se pueden comparar errores relativos de distintas magnitudes.
c) Poner precios como 1,99 €/Kg es un intento de engaño.
d) Comprar a 1,99 €/Kg frente a 2 €/Kg supone un ahorro.
e) Poner muchas cifras en un resultado significa que uno es un gran matemático.
f) La precisión se mide por el número de cifras decimales.

3. FRACCIONES Y DECIMALES

Vamos a ver cómo se pasa de fracción a decimal y de decimal a fracción.

3.1. Expresión decimal de una fracción

Toda fracción tiene una expresión decimal que se obtiene dividiendo el numerador entre el denominador: *a/b = a:b*

Ejemplos:

$$\frac{3}{25} = 0,12; \frac{68}{99} = 0,686868...; \frac{91}{80} = 1,1375; \frac{177}{90} = 1,9666...$$

Como puedes observar unas veces la expresión decimal es exacta (puesto que el resto sale 0) y otras veces sale periódica, infinitos decimales entre los que se repite un bloque de cifras que se denomina periodo.

¿Siempre sale así, exacto o periódico?, tú te contestas cuando leas lo siguiente.

- Hacemos 1/17 = 1 : 17 = 0,05882352941…, que son las cifras que muestra la calculadora, no parece tener periodo, pero ¿será posible que sí lo tenga pero que no lo veamos por ser muy largo?

```
100 |17
150   0,05882
 140
  40
   6
  ...
```

Empezamos a hacer la división:

Los restos obtenidos son 10; 15; 14; 4; 6; …

Como sabes los restos son inferiores al divisor y en este caso pueden ser 1; 2; 3; 4; …; 15 o 16, el 0 no puede salir, lo explicamos después.

Hacemos ahora 2 preguntas: ¿Qué ocurre si vuelve a salir el mismo resto 2 veces?, ¿tiene a la fuerza que repetirse alguna vez un resto?

La respuesta a la primera pregunta es que si se repite un resto se repetirá la cifra del cociente y a partir de ahí se repetirán todas en forma de periodo.

La respuesta a la segunda pregunta es: ¡Sí, a la fuerza, seguro que sí!, si tengo 16 posibles restos y suponemos que han salido los 16 posibles ya, ¿qué ocurre al sacar el siguiente?

Lo entiendes mejor con caramelos, tengo muchos caramelos para repartir entre 16 personas, ya le he dado 1 caramelo a cada uno, es decir, todos tienen ya 1 caramelo, me dispongo a repartir el siguiente, ¿le tocara a alguien que ya tiene?

A esto se le denomina en matemáticas ***"Principio del Palomar"*** y es una herramienta muy potente. Busca algo sobre él.

- Meto 5 pelotas en 4 cajas, ¿habrá alguna caja con más de 1 pelota?

Esperamos que lo hayas entendido, en el peor de los casos el resto número 17 tiene que coincidir con alguno de los anteriores, se repetirán las cifras del cociente y por tanto la expresión decimal es periódica.

- Puedes comprobar que efectivamente los restos son 10, 15, 14, 4, 6, 9, 5, 16, 7, 2, 3, 13, 11, 8, 12, 1, 10, …, el peor de los casos posibles, se repite el que hace el número 17. Lo normal es que se repita antes. Por cierto que la división sale

1:17 = 0,05882352941176470588235294117647… un periodo de ¡sólo 16 cifras!

Aunque hemos visto un caso particular, ésta es una regla general:

La expresión decimal de una fracción es exacta o periódica.

El número de cifras del periodo de 1/*n* es menor o igual que *n* – 1.

¿Cuándo sale exacta y cuándo periódica?

- Pues es fácil, nos dan una fracción como por ejemplo $\frac{27}{150}$, primero la simplificamos hasta obtener la irreducible: $\frac{27}{150}=\frac{9}{50}$, nos fijamos sólo en el denominador y lo descomponemos en factores primos, 50 = 5 · 10 = 5 · 2 · 5 = 2 · 5^2, como los factores primos son sólo 2 y 5 la expresión decimal es exacta.

Veamos la razón:

2 · 5^2 es divisor de $2^2 \cdot 5^2$ = 100 una potencia de 10. Se cumple $\frac{2^2\cdot 5^2}{2\cdot 5^2}=2 \Rightarrow \frac{1}{2\cdot 5^2}=\frac{2}{100}=0,02$, sólo falta multiplicar por 9 ➔ $\frac{9}{2\cdot 5^2}=0,02\cdot 9=0,18$.

Fíjate que el número de decimales es 2, el mayor de los exponentes de 2 y 5.

- *Por ejemplo* $\frac{1}{2^4\cdot 5^3}=0,0005$ tiene 4 cifras decimales pues el mayor exponente es 4.

En general $\frac{1}{2^n\cdot 5^m}$ tiene expresión decimal exacta y el número de cifras decimales es el máximo entre *n* y *m*.

- El otro caso: $\frac{20}{42}=\frac{10}{21}$, descomponemos el 21 en factores primos, 21 = 3 · 7, como hay factores distintos de 2 y 5 la expresión será periódica.

Veamos: si la expresión fuese exacta podríamos escribir $\frac{10}{3\cdot 7}=\frac{a}{10^n} \Rightarrow \frac{10\cdot 10^n}{3\cdot 7}=a$, con "*a*" un número entero. Pero ¡esto no puede ser!, 10 sólo tiene los factores 2 y 5 y los factores 3 y 7 no pueden simplificarse. Como no puede ser exacta será periódica.

Si en el denominador de una fracción irreducible aparecen factores primos distintos de 2 y de 5 la expresión decimal será periódica.

Actividades propuestas

14. Sin hacer la división indica si las siguientes fracciones tienen expresión decimal exacta o periódica:

a) $\frac{21}{750}$ b) $\frac{75}{21}$ c) $\frac{11}{99}$ d) $\frac{35}{56}$

3.2. Forma de fracción de una expresión decimal

Los números decimales exactos o periódicos pueden expresarse como una fracción. A esta fracción se la denomina **fracción generatriz**.

De decimal exacto a fracción:

$$1{,}175=\frac{1175}{1000}=\frac{47}{40}$$

$$20{,}68=\frac{2068}{100}=\frac{517}{25}$$

$$3{,}1416=\frac{31416}{10000}=\frac{3927}{1250}$$

Es muy fácil, mira los ejemplos de la derecha.

¿Has pillado el truco?

Para obtener la fracción generatriz se pone en el numerador el número sin la coma y en el denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene. Se simplifica la fracción.

Las personas inteligentes comprueban lo que han hecho, divide 47 entre 40, si te da 1,175 ¡está bien!, y no hace falta que nadie te lo diga ☺

De decimal periódico a fracción:

Antes de ver el método riguroso vamos a jugar un rato.

- Coge la **calculadora** y haz las siguientes divisiones y apunta los resultados decimales en tu cuaderno:

1:9; 2:9; 3:9; 8:9; 1:99; 13:99; 37:99; 98:99; 1:999; 123:999; 567:999; 998:999.

Nota:
Al hacer 6/9 la calculadora da 0,6666666667, realmente es 6 periódico, la calculadora lo hace bien y redondea en la última cifra.

Si has observado bien ya sabes escribir un montón de expresiones decimales periódicos a su forma de fracción, es decir, sabes calcular su **fracción generatriz**.

Por ejemplo:

- 0,444…= 4/9;
- 0,333… = 3/9 = 1/3.
- 0,171717…= 17/99;
- 0,454545… = 45/99 = 5/11;
- 0,878787= 87/99 = 29/33
- 0,337337337… = 337/999;
- 0,549549…= 549/999 = 61/111
- ¿Cómo será 0,1234512345…?, pues 12345/99999 = 4115/33333

Así que ya lo sabes, para tener un periodo de *n* cifras el denominador tiene *n* nueves.

- Pero el truco anterior no vale para 5,888…

Lo adaptamos: 5,888… = 5 + 0,888… = 5 + $\frac{8}{9}=\frac{45}{9}+\frac{8}{9}=\frac{53}{9}$

Sigue sin valer para 0,7333…

Hacemos 0,7333… = 0,7 + 0,0333… = $\frac{7}{10}+\frac{3}{9}:10=\frac{7}{10}+\frac{3}{90}=\frac{21}{30}+\frac{1}{30}=\frac{22}{30}=\frac{11}{15}$

Combinando los 3 trucos anteriores salen todos, pero no seguimos, te dejamos que investigues tú. Nosotros vamos a explicar el método serio.

Otro ejemplo:

- Nos piden expresar el número 7,3252525... a su forma de fracción. Lo primero será ponerle un nombre, por ejemplo *N* = 7,3252525…, lo segundo es **conseguir 2 números con la misma parte decimal.**

El anteperiodo tiene 1 cifra y el periodo 2. Para conseguir la misma parte decimal multiplicamos por 1000 y la coma se va hasta después del primer periodo, si multiplicamos por 10 la coma se va hasta delante del primer periodo.

$$\begin{array}{r} 1000N = 7325{,}2\cancel{525}\ldots \\ -\quad 10N = 73{,}2\cancel{525}\ldots \\ \hline 990N = 7252 \end{array} \Rightarrow N=\frac{7252}{990}=\frac{3626}{495}$$

Ya tenemos 2 números con la misma parte decimal, si los

restamos ésta desaparece y podemos despejar *N*.
Fíjate que la resta se hace en los 2 miembros a la vez.

Método formal:

Para obtener la fracción generatriz de una expresión decimal multiplicamos el número por la potencia de 10 necesaria para llevarnos la coma al final del primer periodo, luego lo multiplicamos otra vez para que la coma quede al principio del primer periodo.

Otro ejemplo y lo entiendes:

- *N* = 15,25636363…

¿Cómo conseguir 2 números con la parte decimal ,636363…?
Pues lo más fácil es 10000*N* = 152563,6363… y 100*N* = 1525,6363…

Restamos: 9900*N* = 151038 ➔ *N* = $\frac{151038}{9900}=\frac{8391}{550}$

Estos son los casos más difíciles (periódicos mixtos), cuando no haya anteperiodo (periódico puro) sólo habrá que multiplicar una vez puesto que ya tenemos el periodo justo después de la coma:

N = 4,545454…
100*N* = 454,5454…
– 1*N* = 4,5454…

99*N* = 450 ➔ *N* = $\frac{450}{99}=\frac{50}{11}$

Ejemplos:

N	10N –	1N =	9N	
1,333…	13,333… –	1,333… =	12	N = 12/9
N	100N –	10N =	90N	
5,6777…	567,77… –	56,77… =	511	N = 511/90
N	1000N –	100N =	900N	
8,65888…	8658,88… –	865,88... =	7793	N = 7793/900

Por último, si te dicen que hay un truco para hacer esto en segundos y sin calentarse la cabeza, pues es cierto, lo hay, lo conocemos. Es una regla que se olvida y por tanto no vale para nada, no es razonada.

Actividades propuestas

15. Pasa a fracción y simplifica:
    a) 1,4142 b) 0,125 c) 6,66
16. Pasa a fracción y simplifica:
    a. 1,41424142… b. 0,125125… c. 6,666…
17. Pasa a fracción y simplifica:
    1) 1,041424142… 2) 0,7125125… 3) 6,7666…
18. Determina la fracción generatriz de:
    A. 0,333… + 0,666… B. 0,888… · 2,5 C. 0,65 : 0,656565…

4.- RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE FRACCIONES.

Vemos unos cuantos ejemplos:

i) ¿Cuántos litros hay en 90 botellas de 3 cuartos de litro cada una?

Lo primero que debes hacer es ponerte un ejemplo con números más fáciles.
Tengo 10 botellas cada una de 2 litros. Está claro que tenemos 20 litros, ¿qué operación hemos hecho?, ¿multiplicar?, pues lo mismo hacemos con los números del problema:

$$\frac{3}{4}\,litros\Big/_{botella}\cdot 80 botellas=\frac{3\cdot 80}{4}=60 litros$$

(Observa que botellas se van con botellas y las unidades finales son litros).

ii) ¿Cuántas botellas de 3 octavos de litro necesito para envasar 900 litros?

Nuevamente cambiamos los números por otros más sencillos: quiero envasar 10 litros en botellas de 2 litros. Está claro que necesito 5 botellas (10 : 2).
Hacemos lo mismo con nuestros números:

$$900 \text{ litros} : \frac{3}{8} \text{ litros/botella} = 900 : \frac{3}{8} = 900 \cdot \frac{8}{3} = 300 \cdot 8 = 2400 \text{ botellas}$$

Fíjate que litros se va con litros y que las botellas que dividen en el denominador al final pasan multiplicando en el numerador, por lo que unidad del resultado es "botellas".

$$\frac{litros}{1} : \frac{litros}{botella} = \frac{litros \cdot botella}{litros} = botella$$

iii)	*Lluvia gana cierto dinero al mes, si se gasta el 40 % de él en pagar la letra del piso, el 75 % **de lo que le queda** en facturas y le sobran 90 € para comer. ¿Cuánto gana y cuánto gasta en el piso y en facturas?*

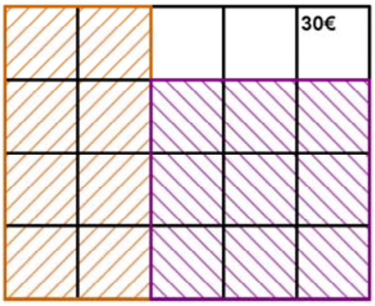
Lo primero: 40 % = $\frac{40}{100} = \frac{2}{5}$ y 75 % = $\frac{75}{100} = \frac{3}{4}$

Lo hacemos de 2 maneras y eliges la que más te guste:

a) Método gráfico:

Hacemos un rectángulo de 5 x 4 cuadrados que son los denominadores.

De las 5 franjas verticales iguales quitamos 2 que es lo que se gasta en la letra del piso.



Lo que queda está dividido en 4 partes iguales y quitamos 3 que es lo que se gasta en facturas. Nos quedan 3 cuadraditos que son los 90 € de la comida. Luego un cuadradito es 90 : 3 = 30 €.

Lo que gana es 30 · 20 = 600 €.

En la letra se gasta 30 · 8 = 240 € y en facturas 30 · 9 = 270 €.

b) Con fracciones:

Si a una cantidad le quitamos sus 2/5 nos quedan 3/5 de ella (1 – 2/5 = 5/5 – 2/5)

En facturas nos gastamos $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{20}$

Si teníamos 3/5 y nos gastamos 9/20 nos quedan $\frac{3}{5} - \frac{9}{20} = \frac{12-9}{20} = \frac{3}{20}$ de la cantidad inicial. Esos 3/20 nos dicen que son 90 €. Por lo tanto 1/20 serán 90 : 3 = 30 €.

La cantidad total son los 20/20 luego 30 · 20 = 600 €.

En la letra del piso me gasto 2/5 de 600 = 1200 : 5 = 240 € y en facturas 3/4 de (600 – 240) = 3/4 de 360 = 270 €.

En cualquier caso los problemas se comprueban.

40 % de 600 = 0,4 · 600 = 240 € se gasta en la letra.

600 – 240 = 360 € me quedan.

75 % de 360 = 0,75 · 360 = 270 € se gasta en facturas.

360 – 270 = 90 € que le quedan para comer. ¡Funciona!

Tengo	Quito	Me queda
1	2/5	3/5
3/5	3/4 de 3/5 = 9/20	3/5 – 9/20 = 3/20

iv) Una pelota pierde en cada bote 1 quinto de la altura desde la que cae.

a) ¿Cuántos botes debe dar para que la altura alcanzada sea inferior a 1 décimo de la inicial?

b) Si después del cuarto bote su altura es de 12,8 cm, ¿cuál era la altura inicial?

Lo primero es darse cuenta de que si pierde un quinto de la altura se queda con los 4 quintos de ésta. Por tanto en cada bote la altura se multiplica por 4/5.

a) Tenemos que ver para qué n se cumple $\left(\frac{4}{5}\right)^n < \frac{1}{10}$ = 0,1. Y esto lo hacemos probando con la calculadora:

$\left(\frac{4}{5}\right)^{10} \approx 0{,}107 > 0{,}1$ pero $\left(\frac{4}{5}\right)^{11} \approx 0{,}0859 < 0{,}1$, luego hacen falta 11 botes.

b) $\left(\frac{4}{5}\right)^4 = \frac{256}{625}$ que es la fracción por la que se ha multiplicado la altura inicial.

$$\frac{256}{625} h = 12{,}8 \Rightarrow h = 12{,}8 \cdot \frac{625}{256} = 31{,}25 cm$$

v)	*A Mariana le descuentan la quinta parte de su sueldo bruto en concepto de IRPF y la sexta parte del mismo para la Seguridad Social. Si cobra 600 € netos, ¿cuál es su sueldo bruto?*

Sumamos las dos fracciones puesto que se refieren a la misma cantidad:

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{6+5}{30}=\frac{11}{30}$$

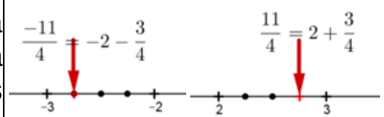
que es la parte que descuentan del sueldo bruto para tener el neto. Le quedan $1-\frac{11}{30}=\frac{19}{30}$ de la cantidad inicial. Esos 19/30 nos dicen que son 600 €. Para calcular el sueldo bruto hacemos:

$$600\cdot\frac{30}{19}\approx 947{,}37€.$$

Comprobación:

1/5 de 947,37 = 189,47 € paga de IRPF
1/6 de 947,37 = 157,90 € paga a la S.S.
947,37 – 189,47 – 157,90 = 600 € que es el sueldo neto. ¡Bien!
Podría haber habido un pequeño desfase de algún céntimo debido a las aproximaciones.

RESUMEN

Prioridad de las operaciones	1º Paréntesis interiores, 2º Potencias y raíces, 3º Productos y divisiones, 4º Sumas y restas.	$10 - 5 \cdot (4 - 3 \cdot 2^2) = 50$
Signo de la suma	(+) + (+) = (+) se suman, (–) + (–) = (–) se suman. (+) + (–) = ¿? tiene el signo del mayor en valor absoluto.	–7/3 – 8/3 = –15/3 = –5 –12/5 + 8/5 = –4/5
Signo del producto y la división	Si tienen igual signo da positivo. (+)·(+) = (–)·(–) = (+) Si tienen signo contrario da negativo. (+)·(–) = (–)·(+) = (–)	–4 · (–10) = +40 +2 · (–15) = –30
Número Racional	Un número *r* es racional si puede escribirse como *r* = *a*/*b* con *a*, *b* enteros y $b \neq 0$.	2;—7/2 son racionales. También 2,6777... $\sqrt{2}$ *y* π no lo son.
Fracción irreducible	Se obtiene dividiendo el numerador y el denominador por el mismo número. Numerador y denominador son primos entre sí.	360/840 = 3/7, la última es irreducible.
Fracciones equivalentes	Son equivalentes las fracciones que tienen igual expresión decimal. Dos fracciones equivalentes representan al mismo número racional. Sus productos cruzados valen lo mismo.	$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\frac{15}{20}$ = 0,75 son equivalentes. 3 · 20 = 4 · 15
Ordenación de fracciones	Se pasan a común denominador o se halla su valor decimal o se usa la lógica y el truco *a*/*b* < *c*/*d* si *ad* < *bc* para números positivos.	$\frac{3}{4}<\frac{4}{5}<\frac{9}{10}$ *ya que* $\frac{15}{20}<\frac{16}{20}<\frac{18}{20}$ Entre otros motivos
Representación	Si es necesario se pasan a forma mixta. Para *n* + *a*/*b* dividimos la unidad que va de *n* a *n* + 1 en *b* partes iguales y tomamos *a*. Para –*n* – *a*/*b* dividimos la unidad que va de –*n* a –*n* – 1 en *b* partes iguales y contamos *a* empezando en –*n*.	
Suma y resta de fracciones	Se pasan a común denominador y se suman (restan) los numeradores.	$\frac{5}{6}-\frac{7}{8}=\frac{20}{24}-\frac{21}{24}=\frac{-1}{24}$
Producto y división	a/b · c/d = ac/bd a/b : c/d = a/b · d/c = ad/bc	$\frac{2}{7}\cdot\frac{14}{6}=\frac{2\cdot 2\cdot 7}{7\cdot 2\cdot 3}=\frac{2}{3}$ $\frac{6}{5}:\frac{14}{10}=\frac{6}{5}\cdot\frac{10}{14}=\frac{6}{7}$
Fracción de un número	a/b de x = a/b ·x = (ax)/b	3/4 de 60 = 3/4 · 60 = 45 3/4 de 4/5 = 3/4 · 4/5 = 3/5
Cifras significativas	Es el número de cifras "con valor" que se utilizan para aproximar un número	0,025 tiene 2; 3,020 tiene 4; 3000 no sabemos las que tiene

Errores	Error absoluto: EA = $\lvert valor\ real - valor\ aproximado \rvert$ Error relativo: ER = $\dfrac{EA}{\lvert Valor\ real \rvert}$ se multiplica por 100 para obtener el % de ER.	$\frac{2}{3} \approx 0,7 \Rightarrow EA \approx 0,033$ $\Rightarrow ER \approx \frac{0,033}{2/3} \approx 0,050 \Rightarrow 5\%$
Fracciones y decimales	La expresión decimal de una fracción siempre es exacta o periódica. Exacta si el denominador sólo tiene como factores primos el 2 o el 5. Periódica en caso contrario.	3/40 = 0,075 exacta 5/12 = 0,41666... periódica
Paso de decimal a fracción	Expresión decimal exacta: se divide el número sin la coma entre la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales. Expresión decimal periódica: Se multiplica *N* por potencias de *10* hasta conseguir 2 números con la misma parte decimal, se restan y se despeja *N*.	3,175 = 3175/1000 = 127/40 *N* = 2,0333... ➔ 100*N* – 10*N* = 183 90*N* = 183➔ *N* = 183/90=61/30.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

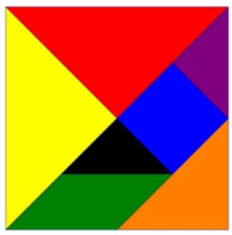
1. Halla paso a paso: (–5 + 4 · (–2) +7) : (7 – (3 – 4) · (–1))
2. Ordena de menor a mayor: $\frac{8}{9}; \frac{-8}{9}; \frac{4}{5}; \frac{38}{45}; \frac{77}{90}; \frac{-9}{8}$
3. Indica razonadamente qué fracción es mayor: $a) \frac{102}{101}\ y\ \frac{98}{99} \quad b) \frac{98}{99}\ y\ \frac{97}{98} \quad c) \frac{-102}{101}\ y\ \frac{-103}{102}$
4. Demuestra que 4,999… = 5. Generaliza: ¿Cuánto vale *n*,999…?
5. Pasa a forma mixta: $\frac{16}{9}; \frac{152}{6}; \frac{-17}{5}; \frac{-23}{4}$
6. Representa de forma exacta en la recta numérica: $\frac{760}{240}$; 3,125; $-\frac{46}{14}$; -2,1666…
7. Simplifica: $a)\ \frac{2 \cdot 7 \cdot 15}{21 \cdot 10} \quad b)\ \frac{10+6}{10-2} \quad c)\ \frac{2 \cdot 3 + 4}{2 \cdot 5 + 10}$
8. Halla la fracción que cae justo en medio de 3/2 y 9/4 en la recta numérica. *Pista:* La media aritmética $\frac{a+b}{2}$ Representa las 3 fracciones en la recta numérica.
9. La media armónica se define como H(*a*, *b*) = $\dfrac{1}{\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}}$, el inverso de la media aritmética de los inversos.

   a) Demuestra que H(a, b) = $\dfrac{2ab}{a+b}$ b) Halla $H\left(\frac{3}{2}, \frac{11}{3}\right)$
10. Halla la fracción inversa de $3 + \frac{4}{5} : \frac{6}{10}$
11. Opera y simplifica: $\frac{4}{5} \cdot \frac{6}{14} \cdot \frac{10}{12} \cdot \frac{7}{2}$
12. Resuelve paso a paso: $\dfrac{\frac{3}{5} - \frac{2}{5} : \frac{4}{6}}{\frac{3}{5} : \left(\frac{1}{6} - 2\right)}$
13. Calcula las dos terceras parte de la sexta parte del 80% de 900.
14. Halla el número tal que sus cuatro tercios valen 520.
15. ¿Cuántos botes de tres octavos de litro puedo llenar con 12 litros?
16. Calcula la fracción por la que hay que multiplicar 450 para obtener 720.
17. Si 100 pulgadas son 254 cm:

a) Halla el largo en centímetros de una televisión si la altura son 19,2 pulgadas y largo/alto = 4/3

b) Igual pero ahora largo/alto = 16/9

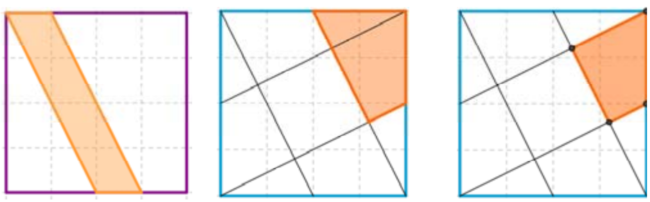
18. Si en una clase el 77,777… % de los alumnos aprueban y hay más de 30 alumnos pero menos de 40, ¿cuántos alumnos son y cuántos aprueban?
19. Tres peregrinos deciden iniciar un viaje de 8 días. El primero de los peregrinos aporta 5 panes para el camino, el segundo peregrino, 3 panes, y el tercero no aporta ninguno, pero promete pagarles a sus compañeros al final del viaje por el pan que haya comido. Cada uno de los días que duró el viaje, a la hora de comer sacaban un pan de la bolsa, lo dividían en tres pedazos y cada peregrino se comía un pedazo. Cuando llegaron a su destino, el caminante que no había aportado ningún pan sacó 8 monedas y las entregó a sus compañeros: 5 monedas para el que había puesto 5 panes y 3 monedas para el que había contribuido con 3 panes. ¿Podrías explicar por qué este reparto de monedas no es justo? ¿Cuál sería el reparto justo? (*Problema de la Olimpiada de Albacete*. ¡! Se debe tener en cuenta no los panes que uno ha puesto sino lo que realmente ha aportado (lo puesto menos lo comido)).
20. Aproxima los números 32567 y 1,395 con 2 cifras significativas y di en cuál se comete menor error relativo.
21. π no puede representarse mediante una fracción de enteros pero, ¿puedes hallar una fracción que lo aproxime con 5 cifras significativas?
22. Aproximamos π por: $$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{16}}$$
    a) Simplifica hasta una fracción impropia irreducible.
    b) Halla el error absoluto y el error relativo.
23. ¿Cuántas botellas de 3/4 de litro necesito para tener la misma cantidad que en 60 botellas de 3/5 de litro?
24. Halla un número entero de tal forma que: su mitad, su tercera parte, su cuarta parte, su quinta parte, su sexta parte y su séptima parte sean números enteros.
25. A la unidad le quito sus 2 quintas partes. ¿Por qué fracción hay que multiplicar el resultado para llegar otra vez a la unidad?
26. Halla la fracción resultante:
    a) Quito 1 tercio de lo que tengo y luego añado 1 tercio de lo que queda.
    b) Añado 1 tercio de lo que tengo y después quito 1 tercio del resultado.
27. Estás aburrido y decides jugar a lo siguiente: Avanzas un metro en línea recta, retrocedes la mitad, avanzas la mitad de lo que has retrocedido en el último paso, retrocedes la mitad de lo que has avanzado en el último paso, …
    Si lo haces muchas, pero que muchas veces, ¿cuánto avanzas en total?
$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\ldots=$$
28. Darío da pasos de 3/5 de metro, su perro Rayo da pasos de ¼ de metro. Si ambos van a igual velocidad y Rayo da 360 pasos por minuto, ¿cuántos pasos por minuto dará Darío?
29. La figura de al lado es un "*Tamgran*".



a) Halla la fracción que se corresponde con cada una de las 7 piezas.

b) Si el lado del cuadrado es de 20cm, halla el área de cada pieza.

30. Si el lado del cuadrado es de 4 cm halla la fracción y el área de la zona coloreada:



31. Calcula:

a) $\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{2}:\frac{1}{3}\right)^2+\left(2-\frac{1}{2}\right)^2$ b) $\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{3}{2}:\frac{3}{4}\right)^3+\left(2-\frac{3}{2}\right)^2$ c) $\frac{8}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}:\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-1\right)^3$

AUTOEVALUACIÓN

1. Sabes operar con números enteros, conoces la prioridad de las operaciones y el uso de paréntesis. Resuelve paso a paso:

$$(-8-7\cdot(-4+6):(2+(-3))+5-4\cdot 2^2)\cdot(-2)$$

2. Sabes obtener fracciones equivalentes. Ordena de mayor a menor:

$$\frac{5}{6};\frac{7}{8};\frac{-7}{8};\frac{-5}{6};\frac{-5}{4}$$

3. Sabes representar fracciones de forma exacta en la recta numérica. Representa:

$$\frac{3}{4};\frac{17}{6};\frac{-11}{7};-0{,}125$$

4. Sabes operar con fracciones. Resuelve paso a paso y simplifica:

$$\frac{\frac{2}{3}-\frac{5}{6}:\left(2-\frac{11}{3}\right)}{\frac{2}{6}}$$

5. Sabes hallar la fracción de un número y la fracción de una fracción.
   a) Halla las cuatro quintas partes de los cinco octavos de 360.
   b) Una botella tiene llenas sus siete octavas partes, si contiene 840 cm³, ¿cuánto le cabe llena?
6. Sabes redondear y calcular el error relativo cometido. Aproxima los números 9859 y 9,945 con 2 cifras significativas y calcula los errores relativos cometidos (en %), ¿cuál es menor?
7. Sabes distinguir cuándo una fracción tiene una expresión decimal exacta.
   a) Di cuáles de las siguientes fracciones tienen expresión decimal exacta y cuáles periódica:

$$\frac{6}{120};\frac{5}{180};\frac{42}{210}$$

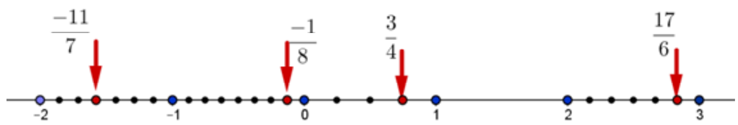
   b) ¿Cuántos decimales tiene $\frac{1}{2^{10}\cdot 5^{6}}$?
   c) ¿Cuántas cifras como máximo puede tener el periodo de 1/97?
8. Sabes pasar de decimal a fracción. Pasa a fracción y simplifica:
   a) 2,225 b) 2,2252525... c) $\frac{0{,}125}{0{,}125125125...}$
9. Sabes resolver problemas mediante fracciones.
   Una medusa crece cada semana un tercio de su volumen.
   a) ¿Cuántas semanas deben pasar para que su volumen se multiplique por más de 3?
   b) Si su volumen actual es de 1200 cm³, ¿cuál era su volumen hace 3 semanas?
10. A un trabajador le bajan el sueldo la sexta parte, de lo que le queda el 25 % se va destinado a impuestos y por último del resto que le queda las dos quintas partes se las gasta en pagar la hipoteca del piso. Si aun tiene disponibles 450 €, ¿cuánto cobraba antes de la bajada de sueldo?, ¿cuánto paga de impuestos y de hipoteca?

Soluciones:

1) 10.

2) $\frac{7}{8}>\frac{5}{6}>\frac{-5}{6}>\frac{-7}{8}>\frac{-5}{4}$.

3)



4) $\frac{7}{2}$.

5) a) 180;
   b) 960 cm³.

6) 9859: 9900 ➔ EA = 41➔ ER = 0,42 %.
   9,945: 9,9 ➔ EA = 0,045 ➔ ER = 0,45 %, es un poco menor el primero.

7) a) Primero se simplifican, son exactas 6/120 y 42/150. 5/180 tiene expresión decimal periódica.
   b) 10 cifras decimales.
   c) 96 cifras (de hecho las tiene).

8) a) $\frac{89}{40}$ b) $\frac{2203}{990}$ c) $\frac{999}{1000}=0{,}999$

9) a) 4 semanas.
   b) 506,25 cm³.

10) Cobraba 1200 €. Ahora cobra 1000 €, paga 250 € de impuestos y 300 € de hipoteca.

CAPÍTULO 2: POTENCIAS Y RAÍCES.
Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas: 3º B de ESO

1. OPERACIONES CON POTENCIAS

Recuerda que la **potencia** a^n de base un número natural a y exponente natural n es un producto de n factores iguales a la base: $a^n = a \cdot a \cdot a \ldots^{n \text{ factores}} \ldots \cdot a \quad (n > 0)$

El factor que se repite es la **base** y el número de veces que se repite es el **exponente**. Al resultado se le llama **potencia.**

Recuerda:
$a^0 = 1$
$1^m = 1$
$(-1)^m = 1 \quad m$ par
$(-1)^n = -1 \quad n$ impar
$0^n = 0$
$a = a^1$

Ya conoces las propiedades de las operaciones con potencias, que vamos a repasar. En este capítulo veremos que si el exponente o si la base es un número negativo o fraccionario, esas propiedades se mantienen.

1.1. Producto de potencias

- Con la misma base

El producto de potencias de la misma base es otra potencia con la misma base y de exponente, la suma de los exponentes: $b^m \cdot b^n \cdot b^p = b^{m+n+p}$

Ejemplo:

$(-5)^4 \cdot (-5)^{-3} \cdot (-5)^2 \cdot (-5)^{-6} = (-5)^{4+(-3)+2+(-6)} = (-5)^{-3} = 1/(-5)^3 = 1/\text{–}{-125}$

- Con el mismo exponente

El producto de potencias con el mismo exponente es otra potencia cuya base se calcula multiplicando las bases, elevada al mismo exponente: $a^m \cdot b^m \cdot c^m = (a \cdot b \cdot c)^m$

Ejemplo:

$(-3)^2 \cdot (5)^2 \cdot (-1)^2 \cdot (-4)^2 = [(-3) \cdot (5) \cdot (-1) \cdot (-4)]^2 = (+60)^2 = 3600$

1.2. Cociente de potencias

- Con la misma base

El cociente entre dos potencia de la misma base es otra potencia con la misma base y su exponente se calcula restando los exponentes: $c^m : c^n = c^{m-n}$

Ejemplo:

$(-12)^7 : (-7)^2 = (-12)^{7-2} = (-12)^5$

- Con el mismo exponente

Para dividir potencias con el mismo exponente, se dividen las bases y el resultado se eleva al mismo exponente:

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Ejemplo:

$18^4 : 3^4 = (18/3)^4 = 6^4$

Ejemplo:

$(5)^3 : (-14)^3 = (5/-14)^3$

- Potencias de exponente entero negativo

Una potencia de base real $a \neq 0$, y exponente natural $n < 0$ es el inverso de la misma con exponente positivo: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

La expresión a^{-n} puede ser el resultado de dividir dos potencias de la misma base, ya que: $a^x : a^y = a^{x-y}$ si $x < y \quad (x-y) < 0$.

Ejemplo:

$6^3 : 6^8 = 6^{3-8} = 6^{-5} = 1/6^5$

1.3. Potencia de un producto

La potencia de un producto puede calcularse realizando primero el producto y elevando el resultado a dicha potencia o bien, elevando cada uno de los factores a dicha potencia y realizando después el producto: $(a \cdot b \cdot c \cdot d)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n \cdot d^n$

Ejemplo:

$[(-2) \cdot (+5) \cdot (-4)]^3 = (+40)^3 = +64000 = (-2)^3 \cdot (+5)^3 \cdot (-4)^3 = (-8) \cdot (+125) \cdot (-64) = +64000$

1.4. Potencia de un cociente

La potencia de un cociente puede calcularse efectuando primero el cociente y elevando el resultado a dicha potencia, o bien elevar dividendo y divisor a la potencia y después efectuar el cociente: $(a : b)^m = a^m : b^m$

Ejemplo:

$[(5) : (-4)]^2 = (5/-4)^2 = (-1{,}25)^2 = +1{,}5625 = (5)^2 : (-4)^2 = 25 : 16 = 1{,}5625$

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.5. Potencia de otra potencia

Al elevar una potencia a otra potencia obtenemos una potencia con la misma base y cuyo exponente es el producto de los exponentes: $((d)^m)^n = d^{m\cdot n}$

Ejemplo:

$((-5)^3)^6 = (-5)^{3x6} = (-5)^{18}$

Actividades resueltas

- *Se cuenta que el inventor del ajedrez se lo mostró al rey Shirham de la India, que se entusiasmó tanto que le ofreció regalarle lo que quisiera. El inventor pidió un grano de trigo para la primera casilla, dos para la segunda, 4 para la tercera, y así duplicando la cantidad en cada casilla. ¿Cuántos granos de trigo habría que poner en la última casilla, en la* 64?

Observamos que el número de granos de trigo de la casilla n es 2^{n-1} por lo que debemos calcular 2^{63}. Calculamos $2^2 = 4$. Luego: $(2^2)^2 = 2^4 = 16$ $((2^2)^2)^2 = 2^8 = 16 \cdot 16 = 256$ $(((2^2)^2)^2)^2 = (2^8)^2 = 2^{16} = 256 \cdot 256 = 65536$

$((((2^2)^2)^2)^2)^2 = (2^{16})^2 = 2^{32} = 65536 \cdot 65536 = 4294967296$

$(((((2^2)^2)^2)^2)^2)^2 = (2^{32})^2 = 2^{64} = 4294967296 \cdot 4294967296 = 18446744073709551616$

Y ahora, para calcular 2^{63} podemos dividir potencias de la misma base:

$2^{63} = 2^{64}/2 = 9223372036854775808$ granos de trigo, un número enorme y difícil de manejar.

Para calcular el número total de granos de trigo observamos que la suma de granos hasta la casilla n es 2^n por lo que entonces debemos calcular 2^{64}, que estimando 1200 granos por kg dan poco más de 15 billones de Tm y eso corresponde a la producción mundial de 21685 años. ¡Imposible que el rey tuviera tanto trigo!

Actividades propuestas

1. Determina el signo de las potencias: a) $(-1)^9$ b) $(5)^{12}$ c) $(-12)^{-5}$ d) $(8)^{-4}$
2. Expresa en forma de una única potencia: a) $(-7)^3 \cdot (-7)^5 \cdot (-7)^2 \cdot (-7)^6$ b) $(3)^2 \cdot (3)^7 \cdot (3) \cdot (3)^4 \cdot (3)^3$
3. Expresa en forma de potencia: a) $(-6)^4 \cdot (4)^4 \cdot (-1)^4 \cdot (-5)^4$
4. Expresa en forma de potencia: a) $(-8)^9 : (-8)^3$ b) $(-3)^2 : (-3)^7$
5. Expresa en forma de potencia: a) $(+75)^4 : (-3)^4$ b) $(-5)^8 : (8)^8$
6. Expresa en forma de potencia: a) $((-2)^5)^6$ b) $((7)^3)^{-5}$

2. POTENCIA DE BASE RACIONAL

La potencia de un número racional es otro número racional cuyo numerador y denominador quedan elevados a dicha potencia: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Ejemplo: $\left(\frac{-2}{5}\right)^4 = \left(\frac{-2}{5}\right)\cdot\left(\frac{-2}{5}\right)\cdot\left(\frac{-2}{5}\right)\cdot\left(\frac{-2}{5}\right) = \frac{(-2)^4}{5^4} = \frac{16}{625}$

2.1. Potencias de base racional y exponente negativo

El resultado de elevar un número racional a una potencia negativa es otra potencia cuya base es el número racional inverso, elevado al mismo exponente, positivo: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

Ejemplo: $(4/9)^{-5} = (9/4)^5$

2.2. Producto de potencias de base racional

Se mantienen las propiedades de las potencias de base un número natural.

Con la misma base

El resultado de multiplicar potencias con la misma base es otra potencia con la misma base y exponente la suma de los exponentes: $(a/b)^m \cdot (a/b)^n \cdot (a/b)^p = (a/b)^{m+n+p}$

Ejemplo:

$(2/5)^3 \cdot (2/5) \cdot (2/5)^{-4} \cdot (2/5)^5 = (2/5)^{3+1+(-4)+5} = (2/5)^5$

- Con el mismo exponente

El resultado de multiplicar potencias con el mismo exponente es otra potencia cuya base es el producto de las bases, elevada al mismo exponente: $(a/b)^m \cdot (c/d)^m \cdot (e/f)^m = [(a/b) \cdot (c/d) \cdot (e/f)]^m$

Ejemplo:

$(–2/3)^4 \cdot (1/4)^4 \cdot (3/5)^4 = [(–2/3) \cdot (1/4) \cdot (3/5)]^4 = (–6/60)^4 = (–1/10)^4$

Actividades propuestas

7. Calcula: a) $(5/3)^3$ b) $(–2/7)^{–4}$ c) $(–1/6)^4$ d) $(–5/2)^{–2}$
8. Expresa como única potencia: a) $(–3/4)^3 \cdot (–3/4)^2 \cdot ((–3/4)^{–8}$ b) $(1/8)^{–5} \cdot (1/8)^4 \cdot (1/8)^{–2}$
9. Expresa como única potencia: a) $(5/4)^6 \cdot (–2/3)^6 \cdot (–1/7)^6$ b) $(–3/5)^{–4} \cdot (–3/8)^{–4} \cdot (–1/4)^{–4}$

2.3. Cociente de potencias de base racional

- Con la misma base

El resultado de dividir potencias con la misma base es otra potencia con la misma base y el exponente la diferencia de los exponentes: $(a/b)^m : (a/b)^n = (a/b)^{m–n}$

Ejemplo:

$(–1/3)^3 : (–1/3)^4 = (–1/3)^{3–4} = (–1/3)^{–1}$

- Con el mismo exponente

El resultado de dividir potencias con el mismo exponente es otra potencia cuya base es el cociente de las bases, elevada al mismo exponente: $(a/b)^m : (c/d)^m = [(a/b) : (c/d)]^m$

Ejemplo:

$(–3/4)^{–5} : (7/8)^{–5} = [(–3/4) : (7/8)]^{–5} = (–24/28)^{–5} = (–6/7)^{–5} = (–7/6)^5$

2.4. Operaciones combinadas con potencias

Ejemplo: $\frac{(-3)^3\cdot(-3)^{-5}\cdot(-3)}{(-3)^8\cdot(-3)^{-6}} = \frac{(-3)^{3-5+1}}{(-3)^{8-6}} = \frac{(-3)^{-1}}{(-3)^2} = (-3)^{-1-2} = (-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^3} = -\frac{1}{27}$

Ejemplo: $\frac{(5^4\cdot(-2)^4\cdot 3^4)^3}{(9^2\cdot 4^2)^3} = \frac{[(5\cdot(-2)\cdot 3)^4]^3}{[(3^2)^2\cdot(2^2)^2]^3} = \frac{[(-30)^4]^3}{[[(3\cdot 2)^2]^2]^3} = \frac{[(-30)^4]^3}{[6^4]^3} = [(-5)^4]^3 = (-5)^{12} = 244140625.$

Actividades propuestas

10. Calcula: a) $(–2/5)^4 : (–2/5)^7$ b) $(5/8)^3 : (5/8)^{–2}$
11. Calcula: a) $(1/5)^{–3} : (2/9)^{–3}$ b) $(–6)^5 : (-2/9)^5$
12. Calcula: a) $\frac{3^2\cdot\frac{2^5}{5^5}}{(-4)\cdot 4^5}$ b) $\frac{\left(\frac{-2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{-1}{6}\right)^2}{\left(\frac{3}{8}\right)^{-4}\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^6}$

3. NOTACIÓN CIENTÍFICA

3.1. Números grandes y números pequeños

Un número expresado en notación científica está formado por un número decimal cuya parte entera está entre 1 y 9, multiplicado por10^n, siendo n un número entero positivo o negativo.

$$a \cdot 10^n \quad \text{siendo} \quad 1 \le a \le 9$$

Si el exponente n es positivo se utiliza para expresar números grandes y si el exponente n es negativo para expresar números pequeños

Ejemplo:

$3420000000000 = 3{,}42 \cdot 10^{12}$ $0{,}000000000057 = 5{,}7 \cdot 10^{–11}$

Actividades resueltas

- *En la leyenda del ajedrez utilizamos números muy grandes. Si no nos interesa tanta aproximación sino hacernos una idea únicamente de los grandes que son, podemos usar la notación científica.*
  Una aproximación para el número de granos de trigo de la casilla 64 es $9 \cdot 10^{18}$, con lo que nos hacemos una idea mejor de lo enorme que es que con el número: 9223372036854775808922337203685477580 8 que da un poco de mareo.
- *Escribe en notación científica*: 2^{16}, 2^{32} y 2^{64}

$2^{16} = 65536 \approx 6{,}5 \cdot 10^4$ $2^{32} = 4294967296 = 4 \cdot 10^9$ $2^{64} = 18446744073709551616 = 1{,}8 \cdot 10^{19}$

3.2. Operaciones con notación científica

- Suma o diferencia

Para realizar sumas y restas, con expresiones en notación científica, se transforma cada expresión decimal de manera que se igualen los exponentes de 10 en cada uno de los términos

Ejemplo:

- *Para calcular* $4 \cdot 10^8 + 2,3 \cdot 10^6 - 6,5 \cdot 10^5$ expresamos todos los sumandos con la misma potencia de 10, eligiendo la menor, en este caso 10^5: $4000 \cdot 10^5 + 23 \cdot 10^5 - 6,5 \cdot 10^5$

Sacamos factor común: $10^5 \cdot (4000 + 23 - 6,5) = 4016,5 \cdot 10^5 = 4,0165 \cdot 10^8$

- Producto

El producto de expresiones en notación científica es el resultado de multiplicar los números decimales y sumar los exponentes de base 10.

Ejemplo:

$2,5 \cdot 10^5 \cdot 1,36 \cdot 10^6 = (2,5 \cdot 1,36) \cdot 10^{5+6} = 3,4 \cdot 10^{11}$

- Cociente

El cociente de dos expresiones en notación científica es el resultado de dividir los números decimales y restar los exponentes de base 10.

Ejemplo:

$5,4 \cdot 10^9 : 4 \cdot 10^7 = (5,4 : 4) \cdot 10^{9-7} = 1,35 \cdot 10^2$

Actividades resueltas

- *Para hacer el cociente para calcular* 2^{63} dividiendo 2^{64} entre 2 en notación científica:

$$2^{63} = 2^{64} / 2 = 1,8 \cdot 10^{19} / 2 = 0,9 \cdot 10^{19} = 9 \cdot 10^{18}.$$

Usa la calculadora

Las calculadoras utilizan la notación científica. Muchas calculadoras para escribir $9 \cdot 10^{18}$ escriben 9e+18.

Actividades propuestas

13. Utiliza tu calculadora para obtener 2^{16}, 2^{32} y 2^{64} y observa cómo da el resultado.
14. Utiliza la calculadora para obtener tu edad en segundos en notación científica.
15. Efectúa las operaciones en notación científica: a) $0,000257 + 1,4 \cdot 10^{-5}$ b) $200000000 - 3,5 \cdot 10^6 + 8,5 \cdot 10^5$
16. Efectúa las operaciones en notación científica: a) $(1,3 \cdot 10^5) \cdot (6,1 \cdot 10^{-3})$ b) $(4,7 \cdot 10^{-8}) \cdot (3 \cdot 10^6) \cdot (2,5 \cdot 10^{-4})$
17. Efectúa las operaciones en notación científica: a) $(5 \cdot 10^{-8}) : (1,5 \cdot 10^{-3})$ b) $(3,25 \cdot 10^{-5}) \cdot (5 \cdot 10^2) : (6,15 \cdot 10^{-7})$
18. Se estima que el volumen del agua de los océanos es de 1285600000 km³ y el volumen de agua dulce es de 35000000 km³. Escribe esas cantidades en notación científica y calcula la proporción de agua dulce.
19. Se sabe que en un átomo de hidrógeno el núcleo constituye el 99 % de la masa, y que la masa de un electrón es aproximadamente de $9,109 \cdot 10^{-31}$ kg. ¿Qué masa tiene el núcleo de un átomo de hidrógeno? (*Recuerda*: Un átomo de hidrógeno está formado por el núcleo, con un protón, y por un único electrón)
20. A Juan le han hecho un análisis de sangre y tiene 5 millones de glóbulos rojos en cada mm³. Escribe en notación científica el número aproximado de glóbulos rojos que tiene Juan estimando que tiene 5 litros de sangre.

4. RAÍCES

4.1. Radicales de índice cualquiera

La raíz enésima de un número *a* es un número *x* que al elevarlo a *n*, da como resultado *a*.

$$\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow x^n = a.$$

La **raíz cuadrada** de un número real no negativo *a* es un único número no negativo *x* que elevado al cuadrado nos de "*a*": $\sqrt{a} = x \Leftrightarrow x^2 = a$, $a \geq 0$, $x \geq 0$.

Recuerda:
n = índice de la raíz
a = radicando
$x = \sqrt[n]{a}$ raíz

Observación

No confundas resolver una **ecuación**, $x^2 = 9$, que tiene dos raíces, 3 y –3, con calcular una **raíz**, como $\sqrt{9}$ que es **únicamente** 3.

Imagina que lío tan horrible sería calcular $\sqrt{9} + \sqrt{1} + \sqrt{4}$ si el resultado pudiera ser:

3 + 1 + 2 = 6, o bien, 3 – 1 – 2 = 0, o bien –3 + 1 – 2 = –4, o bien 3 – 1 + 2 = 4

Observa que $\sqrt{-1}$ no existe en el campo real. Ningún número real al elevarlo al cuadrado da un número negativo. Sólo podemos calcular raíces de exponente par de números positivos. Sin embargo $\sqrt[3]{-1} = -1$, pues $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$.

Actividades resueltas

- *¿Cuánto mide el lado de una habitación cuadrada embaldosada con* 144 baldosas de cuadradas de 25 cm de lado?

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Cada lado tendrá $\sqrt{144}$ = 12 baldosas, que miden 25 cm, luego medirá 12 · 25 = 300 cm = 3 m de largo.

- *En un depósito cúbico caben* 1000 cubos de 1 dm³, ¿cuánto mide su arista? ¿Y si caben 12167 cubos?

Calculamos $\sqrt[3]{1000}$= 10. La arista mide 10 dm. Calculamos ahora $\sqrt[3]{12167}$= 23. La arista mide 23 dm porque 23 · 23 · 23 = 12167.

- *Calcula* $\sqrt[3]{-64}$; $\sqrt[3]{-8}$; $\sqrt[3]{-27}$; $\sqrt[3]{-1000}$.

Las raíces de radicando negativo e índice impar, si existen: $\sqrt[3]{-64}$ = –4; $\sqrt[3]{-8}$ = –2; $\sqrt[3]{-27}$ = –3; $\sqrt[3]{-1000}$ = –10.

4.2. Potencias de exponente fraccionario

Se define $x^{\frac{1}{n}}$ como $\sqrt[n]{x}$: $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$

Por tanto, la potencia $x^{\frac{m}{n}}$ puede expresarse en forma de radical, de manera que *n* será el índice de la raíz y *m* el exponente del radicando. $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$

Ejemplo:

$5^{2/3} = \sqrt[3]{5^2}$

Las propiedades de las potencias de exponente fraccionario coinciden con las de las potencias de exponente un número natural.

Actividades resueltas

- *Simplifica los radicales* $\sqrt[4]{2^{12}}$, $\sqrt[10]{7^{15}}$ usando potencias de exponente fraccionario.

Escribimos el radical como potencia de exponente fraccionario y simplificamos las fracciones:

$$\sqrt[4]{2^{12}} = 2^{\frac{12}{4}} = 2^3 = 8.$$

$$\sqrt[10]{7^{15}} = 7^{\frac{15}{10}} = 7^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{7^3} = 7 \cdot \sqrt{7}$$

- *Calcula* $\sqrt{484}$ y $\sqrt[3]{27000}$ factorizando previamente los radicandos

$$\sqrt{484} = \sqrt{2^2 \cdot 11^2} = 2 \cdot 11 = 22 \qquad \sqrt[3]{27000} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3} = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

- *Calcula* $25^{0,5}$; $32^{\frac{3}{5}}$ y $\left(3^{\frac{6}{5}}\right)^{\frac{5}{2}}$

$$25^{0,5} = 25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5 \qquad 32^{\frac{3}{5}} = \left(2^5\right)^{\frac{3}{5}} = 2^{\frac{5\cdot3}{5}} = 2^3 = 8 \qquad \left(3^{\frac{6}{5}}\right)^{\frac{5}{2}} = 3^{\frac{6\cdot5}{5\cdot2}} = 3^3 = 27$$

4.3. Extracción de factores de un radical

Tenemos $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$ con *m* > *n*, para extraer factores de la raíz realizamos el cociente: *m* dividido entre *n* tiene de cociente *p* y de resto *r*: *m* = *n* · *p* + *r*. El resultado es $\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n]{x^{n\cdot p+r}} = x^{\frac{n\cdot p+r}{n}} = x^{p+\frac{r}{n}} = x^p \cdot \sqrt[n]{x^r}$.

Si *m* > *n*, $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = x^p \cdot \sqrt[n]{x^r}$.

Ejemplo: $\sqrt[3]{x^5} = x \cdot \sqrt[3]{x^2}$ $\qquad \sqrt{2^4 \cdot 3^3 \cdot 5} = \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 3 \cdot 5} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3 \cdot 5} = 12 \cdot \sqrt{15}$

Actividades propuestas

21. Calcula todas las soluciones: a) $\sqrt{121}$ b) $\sqrt[3]{-8}$ c) $\sqrt[4]{10000}$ d) $\sqrt[5]{-1}$ e) $\sqrt[7]{1}$
22. Expresa en forma de radical: a) $(-3)^{4/5}$ b) $8^{1/3}$ c) $5^{2/3}$
23. Extrae los factores posibles en cada radical: a) $\sqrt[4]{a^6 \cdot b^5}$ b) $\sqrt[3]{6^5 \cdot 3^4 \cdot 2^6}$ c) $\sqrt{4 \cdot 5^3 \cdot 9^3}$

4.4. Operaciones con radicales

Como los radicales se pueden escribir como potencias, tienen las propiedades que ya conoces de las potencias.

- **Raíz de un producto**

La raíz de un producto es igual al producto de las raíces de los factores: $\sqrt[n]{x\cdot y\cdot z}=\sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{y}\cdot\sqrt[n]{z}$

Ejemplo: $\sqrt[3]{8\cdot 27\cdot 64}=\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{64}=2\cdot 3\cdot 4=24$

- **Raíz de un cociente**

La raíz de un cociente es igual al cociente de la raíz del dividendo y la raíz del divisor: $\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}=\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$

Ejemplo: $\sqrt[5]{\dfrac{32}{243}}=\dfrac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[5]{243}}=\dfrac{2}{3}$

- **Raíz de una raíz**

La raíz de una raíz es igual a otra raíz con el mismo radicando y cuyo índice es el producto de los índices.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}}=\sqrt[n\cdot m]{x}$$

Ejemplo: $\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}}=\sqrt[3\cdot 2]{64}=\sqrt[6]{64}=\sqrt[6]{2^6}=2$

4.5. Operaciones combinadas

Ejemplo:

$x^{2/3}\cdot y^{1/3}=\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{x^2\cdot y}$

Ejemplo: $\dfrac{x^{\frac{7}{4}}}{x^{\frac{5}{3}}}=\dfrac{\sqrt[4]{x^7}}{\sqrt[3]{x^5}}=\dfrac{x\cdot\sqrt[4]{x^3}}{x\cdot\sqrt[3]{x^2}}=\dfrac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[3]{x^2}}$

Recuerda

Hay operaciones con radicales que **NO** están permitidas.

$10=\sqrt{100}=\sqrt{64+36}$ que es distinto de:

$\sqrt{64}+\sqrt{36}=8+6=14$.

Actividades propuestas

24. Expresa en forma de producto o de cociente: a) $\sqrt[3]{a\cdot b}$ b) $\sqrt{2\cdot 5\cdot 7}$ c) $\sqrt[2]{\dfrac{7}{6}}$ d) $\sqrt{\dfrac{x^3}{y}}$

25. Expresa en forma de única raíz: a) $\sqrt[3]{\sqrt{18}}$ b) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{25}}$

26. Expresa en forma de potencia: a) $\sqrt[4]{2^3}\cdot\sqrt{2^5}$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[4]{5^2}}{\sqrt{5^3}}$

27. Simplifica la expresión: a) $\left(\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{x}}\right)^3$ b) $\dfrac{\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[5]{x^{11}}}{\sqrt[3]{x}}$

4.6. Raíces cuadradas

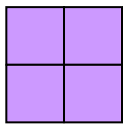
Ya sabes que:

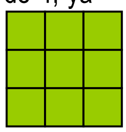
La raíz cuadrada **exacta** de un número *a* es otro número *b* cuyo cuadrado es igual al primero:

$$\sqrt{a}=b\Leftrightarrow b^2=a$$

Ejemplo:

- Al poder construir un cuadrado de lado 2 con 4 cuadrados pequeños se dice que 2 es la raíz cuadrada de 4, ya que $2^2=4$, y por tanto decimos que 2 es la *raíz cuadrada* de 4, es decir:





$$\sqrt{4}=2.$$

Obtener la raíz cuadrada exacta es la operación opuesta de elevar al cuadrado.

- Podemos construir un cuadrado de lado 3 con 9 cuadrados pequeños, por tanto como $3^2=9$ entonces:

$$\sqrt{9}=3.$$

- Al escribir $\sqrt{64}=8$ se lee que la *raíz cuadrada* de 64 es 8.

Al signo √ se le denomina **radical**, se llama **radicando** al número colocado debajo, en este caso 64 y se dice que el **valor de la raíz** es 8.

Ejemplo:

- Sabemos que el área de un cuadrado es 121 cm², ¿cuánto vale su lado?

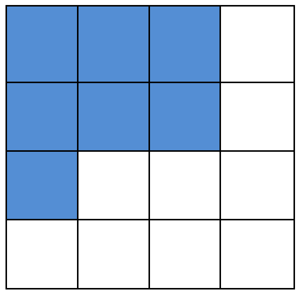
Su lado valdrá la raíz cuadrada de 121. Como $11^2 = 121$, entonces la raíz cuadrada de 121 es 11. El lado del cuadrado es 11.

Raíces aproximadas

Ejemplo:

- ¿Se puede construir un cuadrado con 7 cuadrados pequeños?

Observa que se puede formar un cuadrado de lado 2, pero sobran 3 cuadrados pequeños, y que para hacer un cuadrado de lado 3 faltan 2 cuadrados pequeños.



El número 7 no es un cuadrado perfecto, no tiene raíz cuadrada exacta porque con 7 cuadrados pequeños no se puede construir un cuadrado.

Es más, aquellos números naturales que no tienen raíz cuadrada exacta, su expresión decimal es un número irracional, con infinitas cifras decimales no periódicas.

Pero podemos afirmar que $2 < \sqrt{7} < 3$.

Como 4 es un cuadrado perfecto y $\sqrt{4} = 2$, y 9 es también otro cuadrado perfecto y $\sqrt{9} = 3$, los números, 5, 6, 7, y 8 no son cuadrado perfectos y su raíz cuadrada es un número irracional.

Con más dificultad se puede aproximar esos valores, así $2{,}6 < \sqrt{7} < 2{,}7$, (Multiplica 2,6 por sí mismo, y 2,7 por sí mismo, y comprueba que se verifica la desigualdad) o podemos obtener más cifras decimales: $2{,}64 < \sqrt{7} < 2{,}65$, o bien $2{,}64575131 < \sqrt{7} < 2{,}64575132$.

Podemos encontrar un valor aproximado de la raíz.

Para calcular raíces cuadradas puedes utilizar la calculadora, con la tecla √

Es importante conocer los cuadrados perfectos, pues mentalmente, te ayuda a saber entre qué valores enteros está la raíz cuadrada que quieres calcular.

Observa que:

El cuadrado de un número, positivo o negativo, es siempre un número positivo. Luego no existe la raíz cuadrada de un número negativo.

Actividades propuestas

28. Escribe la lista de los 12 primeros cuadrados perfectos.

29. Calcula **mentalmente** en tu cuaderno las siguientes raíces:

a) $\sqrt{49}$ b) $\sqrt{25}$ c) $\sqrt{100}$ d) $\sqrt{64}$ e) $\sqrt{81}$ f) $\sqrt{1}$ g) $\sqrt{0}$.

30. Calcula **mentalmente** en tu cuaderno las aproximaciones enteras de las siguientes raíces:

a) $\sqrt{51}$ b) $\sqrt{27}$ c) $\sqrt{102}$ d) $\sqrt{63}$ e) $\sqrt{80}$ f) $\sqrt{2}$ g) $\sqrt{123}$.

31. Indica qué raíces cuadradas van a ser números naturales, cuáles números irracionales y cuáles no existen:

a) $\sqrt{36}$ b) $\sqrt{-25}$ c) $\sqrt{-100}$ d) $\sqrt{32}$ e) $\sqrt{-7}$ f) $\sqrt{10}$ g) $\sqrt{100}$.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

Potencias

1. Expresa en forma de única potencia:

a) $2^5 \cdot (-3)^5 \cdot (-1)^5$ b) $(-1)^3 \cdot (-1)^8 \cdot (1)^5$ c) $4^3 \cdot (-2)^3 \cdot (-1)^3 \cdot 5^3$ d) $(-5)^2 \cdot (-5)^4 \cdot (5)$

e) $(-9)^2 \cdot 9^3 \cdot 9^4 \cdot 9$ f) $(-18)^4 : (-3)^4$ g) $(6)^5 : (6)^2$ h) $(-3)^2 : (-3)^4$

2. Expresa en forma de única potencia:

a) $\dfrac{4^2 \cdot 4^3 \cdot 4}{5^6 \cdot (-1)^6}$

b) [(2)7 : (-3)7] · (– 4)3 · (–4)4

c) $\dfrac{[-2^4 \cdot (-3)^4 \cdot 6^4]^3 : [(-4)^8 \cdot (-4)^4]}{9^6 \cdot 9^4 : 9}$

d) $\dfrac{(-3)^2 \cdot (10)^2 : (-5)^2}{7^5 : 7^3}$

3. Expresa en forma de potencia de exponente positivo: $(-4)^{-3}$ b) $(9)^{-3}$ c) $(-2)^5 : (-2)^9$ d) $(-5) \cdot (-5)^2 : (-5)^6$
4. Expresa en forma de única potencia: $((2)^4)^3$ b) $((-3)^{-2})^5$ c) $((-1)^4)^3$ d) $((5)^2)^{3/5}$
5. Expresa en forma de única potencia: $(-3/5)^4$ b) $(2/9)^4$ c) $(1/5)^{-3}$ d) $(2/3)^{-4}$
6. Expresa en forma de única potencia:

a) $(2/3)^{-4} \cdot (2/3)^3 \cdot (2/3)^5$ b) $(1/6)^3 \cdot (3/5)^3 \cdot (-6/7)^3$ c) $(-5/3)^4 : (-2/3)^4$
d) $(4/9)^3 : (4/9)^5$ e) $((-4/3)^{-3})^5$ f) $((2/7)^{-1})^{-3}$

7. Expresa en forma de única potencia:

a) $\dfrac{(2/3)^3 \cdot (-1/5)^3 \cdot (-4/9)^3 \cdot (1/2)^3}{(-1/4)^3 \cdot (-1/4)^{-2} \cdot (-1/4) \cdot (-1/4)^4}$

b) $((-1/3)^4)^{3/2} \cdot (2/5)^{1/6}$

c) $\dfrac{(2/5)^{1/2} \cdot (2/5)^{3/4} \cdot (2/5)^{-1/6}}{(7/8)^3 : (1/6)^3}$

8. Expresa en forma de notación científica:

a) 140000000 b) 32800 c) 71000000000000000 d) 0,0000075
e) –18000000 f) 0,00000000042 g) –0,009 h) 0,00000000007

9. Busca información expresada en notación científica sobre:

a) La distancia entre la Tierra y la Luna b) Unidad de masa atómica
c) Km que corresponden a un año luz d) Un gúgol d) La longitud de onda de los rayos cósmicos

10. Realiza las operaciones y expresa el resultado en notación científica:

a) $4 \cdot 10^3 + 2{,}4 \cdot 10^6 - 1{,}7 \cdot 10^5 - 3 \cdot 10^3$ b) $2{,}3 \cdot 10^{-5} - 3{,}45 \cdot 10^{-4} + 6 \cdot 10^{-3}$
c) $3 \cdot 10^{-4} \cdot 4{,}5 \cdot 10^2$ d) $1{,}8 \cdot 10^5 : 5 \cdot 10^8$

11. La estrella Sirio está a unos 8,611 años luz de nuestro planeta. Expresa en metros, mediante notación científica la distancia que recorrería una nave espacial que realizara un trayecto de ida y vuelta a Sirio. (*Recuerda*: Un año luz, la longitud que recorre la luz en un año, es aproximadamente igual a $9{,}46 \times 10^{12}$ km (9 460 730 472 580,8 km con más aproximación))
12. La masa de un electrón en reposo se estima en $9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg, la de un protón es de $1{,}672 \cdot 10^{-27}$ kg, y la de un neutrón $1{,}64 \times 10^{-27}$ kg. Calcula la masa de un átomo de carbono 14 (C_{14}) formado por seis protones, seis electrones y 6 + 2 = 8 neutrones. (El C_{14} es un isótopo que tiene dos neutrones más que el carbono normal y que se utiliza para datar).
13. Calcula y expresa en notación científica:

a) $0{,}00829 + 4 \cdot 10^{-3} + 7{,}45 \cdot 10^{-5} - 6{,}32 \cdot 10^{-4}$ b) $5 \cdot 10^6 - 2{,}8 \cdot 10^7 - 3 \cdot 10^5$
c) $5 \cdot 10^{-2} - 4 \cdot 10^2 + 1{,}4 \cdot 10^{-3}$ d) $3 \cdot 10^{-5} \cdot (-2{,}7) \cdot 10^{-3} + 4{,}2 \cdot 10^{-6}$

14. Expresa el resultado de esta operación en notación científica: a) $\dfrac{2{,}4 \cdot 10^{-3} - 1{,}5 \cdot 10^{-4}}{0{,}025 + 3 \cdot 10^{-4}}$ b) $\dfrac{(1{,}3 \cdot 10^4) \cdot (5 \cdot 10^3)}{(4 \cdot 10^5) \cdot (2{,}3 \cdot 10^6)}$
15. Se estima que existen 40 millones de bacterias en un gramo de tierra. Expresa en notación científica de forma aproximada el número de bacterias que existen en unos camiones que están descargando 50 toneladas métricas de arena en una playa.
16. Si $x = 240000$; $y = 0{,}00058$; $z = 7{,}2 \cdot 10^6$: Calcula y expresa en notación científica a) $x \cdot y$ b) $2x + y \cdot 10^7$ c) $3x - 5y$
17. Arquímedes, en su tratado *El arenario* cuenta una manera para expresar números muy grandes, como el número de granos de arena que hay en toda la Tierra. Vamos a estimarlos ahora por otro procedimiento. Estimamos cuántos granos de arena necesitamos para tener un gramo de arena. Te parece que 50 granos de arena. Se estima que la masa de la Tierra es de: M_T=5 980 000 000 000 000 000 000 000 000 g = $598 \cdot 10^{25}$ g

Calcula de forma aproximada el número de granos de arena que hay en toda la Tierra.

18. Vemos en Internet que la masa de Marte es de 639E21 kg, que la masa de Júpiter es de 1,898E27 kg, y que la masa de la Tierra es de 5,972E24 kg. a) Calcula cuántas veces cabría la Tierra en el planeta Júpiter. b) Calcula la relación entre la masa de la Tierra y la de Marte.
19.

Raíces

20. Calcula: a) $\sqrt{12100}$ b) $\sqrt[3]{-0{,}008}$ c) $\sqrt[3]{-125}$ d) $\sqrt[5]{-1}$ e) $\sqrt{0{,}49}$

21. Calcula: a) $\sqrt[4]{2{,}0736}$ b) $\sqrt[5]{-0{,}00001}$ c) $\sqrt{33640000}$ d) $\sqrt[3]{-2{,}7\cdot 10^{-6}}$

22. Expresa en forma de raíz: a) $(-4)^{3/5}$ b) $7^{1/6}$ c) $(21)^{1/3}$ d) $(-5)^{2/3}$

23. Expresa en forma de potencia: a) $\sqrt[5]{6^3}$ b) $\sqrt{(-7)^5}$ c) $\sqrt{3^5}$ d) $\sqrt[3]{(-30)^4}$

24. Extrae los factores posibles de estos radicales:

a) $\sqrt{3^3\cdot 10^5\cdot 2}$ b) $\sqrt[3]{6^9\cdot 2^5}$ c) $\sqrt[4]{x^{11}\cdot y^5}$ d) $\sqrt[3]{3^4\cdot 5^6}$

25. Extrae los factores posibles de estos radicales:

a) $\sqrt[3]{a^7\cdot b^3\cdot c^{-6}}$ b) $\sqrt{5^{-5}\cdot 3^{-6}}$ c) $\sqrt[4]{10^5 : 6^8}$ d) $\sqrt{x^3\cdot x^8\cdot x}$

26. Simplifica: a) $\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^3}$ b) $\sqrt[3]{\left(\frac{-4}{5}\right)\cdot\left(\frac{-4}{5}\right)^5}$ c) $\sqrt{\frac{x^3\cdot y^4}{x^8\cdot y}}$ d) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{4}\right)^5 : \left(\frac{4}{3}\right)^5}$

27. Expresa en forma de producto: a) $\sqrt{3\cdot 50\cdot 12}$ b) $\sqrt[3]{5^2\cdot 2^4\cdot 3^6}$ c) $\sqrt{8\cdot 3^4\cdot 9}$ d) $\sqrt[3]{a^8\cdot b^2\cdot c^6}$

28. Expresa en forma de cociente: a) $\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)}$ b) $\sqrt[5]{\frac{15}{32}}$ c) $\sqrt[3]{\frac{-7}{9}}$ d) $\sqrt{\frac{15}{24}}$

29. Expresa en forma de única raíz: a) $\sqrt{\sqrt{48}}$ b) $\sqrt[3]{\sqrt{450}}$ c) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{9000}}$ d) $\sqrt[2]{\sqrt[5]{-1}}$

30. Simplifica las operaciones: a) $\sqrt[3]{3^5}\cdot\sqrt[3]{2^4}$ b) $\left(\sqrt[3]{-27}\right)\cdot 5^{\frac{2}{3}}$ c) $\sqrt[5]{2^{12}} : \sqrt[5]{3^8}$ d) $\sqrt[2]{3}\cdot\sqrt[2]{10^5} : \sqrt{2^3}$

31. Simplifica las operaciones: a) $\sqrt[3]{x^5} : \sqrt[2]{x^3}$ b) $\sqrt{\sqrt{10^{12}}}$ c) $\sqrt{5\cdot(-2)^6\cdot(-3)^6}$ d) $\sqrt[5]{(-6)^{12}} : \sqrt[5]{(-6)^7\cdot 3^{10}}$

32. Simplifica las operaciones: a) $\sqrt[2]{\sqrt[3]{64}} : 5^{\frac{2}{3}}$ b) $\dfrac{(-4)^5\cdot\sqrt[3]{(-4)}}{\sqrt{2^3 : \sqrt{2^5}}}$ c) $\dfrac{\left(\left(-7^3\right)\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt[3]{(-7)^2}}{\sqrt{\sqrt{(-7)}}}$

RESUMEN

	POTENCIAS Y RAÍCES	*Ejemplos*
Producto y cociente de potencias	En el producto de potencias con la misma base se suman los exponentes. En el cociente se restan los exponentes Con el mismo exponente: En el producto, se multiplican las bases y se eleva el resultado al mismo exponente. En el cociente se dividen las bases y se eleva el resultado al mismo exponente	$(-5)^4\cdot(-5)^2=(-5)^6$ $3^2 : 3^7 = 3^{-5}$ $2^5\cdot 7^5 = 14^5$ $(-5)^3 : (4)^3 = (-5/4)^3$
Potencia de un producto y de un cociente	La potencia de un producto es igual al producto de cada uno de los factores elevados a dicha potencia $(a\cdot b\cdot c\cdot d)^n = a^n\cdot b^n\cdot c^n\cdot d^n$ La potencia de un cociente es igual al cociente del dividendo y el divisor elevados a dicha potencia: $c^m : c^n = c^{m-n}$	$(5\cdot 2\cdot 3)^4 = 5^4\cdot 2^4\cdot 3^4$ $(-7/2)^6 = 7^6/(-2)^6$
Potencia de otra potencia	$((d)^m)^n = d^{m\times n}$	$((-4)^3)^5 = (-4)^{15}$
Potencia de base racional	$(a/b)^n = a^n/b^n$	$(6/5)^2 = 6^2/5^2$
Potencia de exponente negativo	$a^{-n} = 1/a^n$	$8^{-3} = 1/8^3$
Notación científica: operaciones	$a\cdot 10^{\pm n}$ siendo 1 a 9. + n para grandes números –n para pequeños números	$320000000 = 3{,}2\cdot 10^8$ $0{,}0000000009 = 9\cdot 10^{-10}$

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Radicales: raíces de índice cualquiera	$\sqrt{49}=7;\ \sqrt[3]{-216}=-6;\sqrt[3]{64}=4;\ \sqrt[4]{81}=3;\ \sqrt[5]{-32}=-2$	
Potencias de exponente racional	Una potencia con exponente racional puede expresarse en forma de raíz cuyo índice es el denominador del exponente y el radicando queda elevado al numerador del exponente: $x^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{x^m}$	$8^{2/5}=\sqrt[5]{8^2}$
Extracción de factores de un radical	Si $m = n{\cdot}c + r$ entonces $\sqrt[n]{a^m}=a^c\cdot\sqrt[n]{a^r}$	$\sqrt[3]{8^7}=8^2\cdot\sqrt[3]{8}$
Operaciones con radicales	$\sqrt[n]{x\cdot y\cdot z}=\sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{y}\cdot\sqrt[n]{z}$; $\sqrt[n]{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$	$\sqrt[4]{5\cdot3\cdot2}=\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{2}=$ $\sqrt[3]{\frac{1}{27}}=\frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{27}}=\frac{1}{3}$

AUTOEVALUACIÓN

1. El resultado de las operaciones siguientes es: $(-6)^3\cdot(-6)^{-5}\cdot(-6)$ y $(12)^7 : (12)^5$
   a) 6 y 12^2 b) 1/6 y 12^5 c) –1/6 y 12^2
2. El resultado de las operaciones siguientes es: $(-5)^4\cdot(-1)^4\cdot(6)^4$ y $(-8)^7 : (5)^7$
   a) $(-30)^4$ y $(-3)^7$ b) 30^4 y $(-8/5)^7$ c) 30^4 y $(-3)^7$
3. El resultado de las operaciones siguientes es: $((-2)^5)^3$; $((-1)^5)^7$ y $((-5)^{2/3})^6$
   a) $(-2)^{15}$; (-1) y $(5)^{8/3}$ b) -2^{15}; (-1) y -5^4 c) $(-2)^{15}$; (-1) y $(-5)^4$
4. El resultado de las operaciones siguientes es: $(8)^{-3}$; $(-2)^{-4}$ y $(10^5)^{-2}$
   a) 1/512; 1/16 y $1/10^{10}$ b) $1/8^3$; $-1/2^4$ y $1/10^{10}$
5. El resultado de las operaciones siguientes es: $(5/7)^3$; $(-1/3)^{-2}$ y $(-2/5)^4$
   a) $5^3/7^3$; $1/3^2$ y $-2^4/5^4$ b) $5^3/7^3$; 3^2 y $2^4/5^4$
6. El resultado de las operaciones siguientes es: $(2/3)^3\cdot(2/3)^2\cdot(2/3)^{-5}$
   a) 1 b) 2/3 c) –2/3 d) $(2/3)\cdot(-3/2)$
7. Las expresiones $3{,}1\cdot10^8$ y 0,0000000095 corresponden a :
   a) 3100000000 y $9{,}5\cdot10^{-10}$ b)310000000 y $9{,}5\cdot10^{-10}$ c)310000000 y $9{,}5\cdot10^{-9}$
8. El resultado de esta operación es: $(0{,}00098 + 3\cdot10^{-6} - 4{,}2\cdot10^{-4})\cdot2{,}5\cdot10^5$
   a) 124,5 b) 2407,5 c) 107,5 d) 140,75
9. El resultado de las operaciones siguientes es: $\sqrt[3]{-1331}$; $\sqrt{256}$ y $\sqrt[5]{-1}$
   a) –11, 16, –1 b) 11, 16, 1 c) –11, –16, –1
10. Las siguientes expresiones corresponden a: $(-4)^{3/5}$; $(3)^{1/2}$ y $(-5)^{4/3}$
    a) $\sqrt[5]{-4^3}$; $\sqrt{3}$ y $\sqrt[3]{-5^4}$ b) $\sqrt[5]{(-4)^3}$; $\sqrt{3}$ y $\sqrt[3]{(-5)^4}$ c) $-\sqrt[5]{4^3}$; $\sqrt{3}$ y $\sqrt[3]{-(5^4)}$
11. El resultado de extraer factores de estos radicales es: $\sqrt[3]{(-5)^4}$ y $\sqrt{2^3\cdot5^5}$
    a) $(-5)\cdot\sqrt[3]{(-5)}$ y $2\cdot5^3\sqrt{2\cdot5}$ b) $(-5)\cdot\sqrt[3]{(-5)}$ y $50\sqrt{10}$ c) $(-5)\cdot\sqrt[3]{(-5)}$ y (-5)·3√(-5)
12. Las operaciones siguientes $\sqrt[3]{-(5):12}$ y $\sqrt[3]{\sqrt[3]{-18}}$ pueden expresarse:
    a) $\frac{\sqrt[3]{-5}}{\sqrt[3]{12}}$ y $\sqrt[9]{-18}$ b) $\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{12}}$ y $\sqrt[6]{-18}$ c) $\frac{\sqrt[3]{-5}}{\sqrt[2]{12}}$ y $\sqrt[9]{18}$

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

CAPÍTULO 3: SUCESIONES.

Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas:3º B de ESO

1. SUCESIONES DE NÚMEROS REALES

1.1. Definiciones

Una **sucesión** de números reales es una secuencia ordenada de números.

Ejemplo:

- Las siguientes secuencias son sucesiones:

  a) 1, 2, 3, 4, 5, 6,… b) 2, 4, 6, 8, 10, 12,… c) $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$

Se llama **término de una sucesión** a cada uno de los elementos que constituyen la sucesión.

Para representar los diferentes términos de una sucesión se usa una misma letra con distintos subíndices. Estos subíndices indican el lugar que ocupa ese término en la sucesión.

Ejemplo:

- En la sucesión a) tendríamos que: $a_5 = 5$, ya que es el término de la sucesión que ocupa el quinto lugar.
- En la sucesión b), el tercer término, se denotaría b_3 y correspondería al 6
- En la sucesión c), por ejemplo $c_2 = \frac{1}{2}$

Lo realmente importante a la hora de nombrar los términos de una sucesión es el subíndice porque denota el lugar que ocupan en la sucesión. Las letras con las que se designa la sucesión son distintas para sucesiones distintas y suelen ser letras minúsculas.

Se llama **término general de una sucesión** al término que ocupa el lugar *n*-ésimo y se escribe con la letra que denote a la sucesión (por ejemplo *a*) con subíndice *n*: (a_n)

Ejemplo:

- En los casos que estamos considerando, los términos generales de las sucesiones serían: a_n, b_n y c_n.

Si nos fijamos, los valores que toman los subíndices son números naturales, pero los términos de la sucesión no tienen por qué serlo, es decir, los valores que toma la sucesión son números reales. Por eso, podemos definir sucesión de números reales de forma más rigurosa como:

Definición:

Se llama **sucesión de números reales** a una aplicación que hace corresponder a cada número natural un número real.

Actividades resueltas

- *En las sucesiones anteriores, observamos que:* $a_{1003} = 1003$, $b_{12} = 24$ *y* $c_{37} = \frac{1}{37}$

Actividades propuestas

1. Escribe los diez primeros términos de las siguientes sucesiones:

   a) –1, –2, –3, –4,… b) 1, 4, 9, 16,… c) 1, 3, 5, 7,…

2. Escribe el término que ocupa el lugar 100 de cada una de las sucesiones anteriores.
3. Sabemos que un cuerpo con densidad suficiente que cae libremente sobre la Tierra tiene una velocidad que aumenta 9,8 m/s. Si en el primer segundo su velocidad es de 15 m/s, escribe en tu cuaderno la velocidad en los segundos indicados en la tabla. ¿Observas alguna regla que te permita conocer la velocidad al cabo de 20 segundos? Representa gráficamente esta función.

Tiempo en segundos	1	2	3
Velocidad en m/s	15		

1.2. Formas de definir una sucesión

Existen varias formas de definir una sucesión:

Dando una propiedad que cumplan los términos de esa sucesión

Ejemplo:

- Sucesión de los números pares: 2, 4, 6, 8, 10,…
- Sucesión de los números primos: 2, 3, 5, 7, 11,..
- Sucesión de los números naturales acabados en 9: 9, 19, 29, 39, ...
- Sucesión de los cuadrados de los números naturales: 1, 4, 9, 16,…

Dando su término general o término *n*-ésimo:

Es una expresión algebraica en función de *n*.

Revisores: Javier Rodrigo y Nieves Zuasti
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez y Milagros Latasa Asso
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ejemplo:

- $a_n = n^2 + 3$

Sabiendo esto, podemos construir los términos de la sucesión sin más que sustituir *n* por los números naturales. Así, tendríamos:

$a_1 = 1^2 + 3 = 4$; $a_2 = 2^2 + 3 = 7$; $a_3 = 3^2 + 3 = 12$; $a_4 = 4^2 + 3 = 19$; …..

- $d_n = (-1)^n \dfrac{1}{n}$

$d_1 = (-1)^1 \dfrac{1}{1} = -1$; $d_2 = (-1)^2 \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$; $d_3 = (-1)^3 \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}$; $d_4 = (-1)^4 \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}$

Por una ley de recurrencia:

Es una expresión que permite obtener un término a partir de los anteriores

Ejemplo:

- La sucesión: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,… conocida como sucesión de Fibonacci se obtiene con la siguiente ley de recurrencia:

$$a_1 = a_2 = 1,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

Es decir, cada término, salvo los dos primeros, se obtiene como suma de los dos anteriores.

Actividades resueltas

- *Sea la sucesión de término general:* $a_n = 2n + 3$.
  Sus cinco primeros términos son: $a_1 = 5$, $a_2 = 7$, $a_3 = 9$, $a_4 = 11$, $a_5 = 13$
- *Dada la sucesión en forma recurrente:* $a_1=1$, $a_n = a_{n-1} + 3$
  Sus cuatro primeros términos son:

$a_1 = 1$ (ya viene dado),

$a_2 = 1 + 3 = 4$,

$a_3 = 4 + 3 = 7$,

$a_4 = 7 + 3 = 10$

Actividades propuestas

4. Escribe los cuatro primeros términos de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = 2n^2+1$ $b_n = \dfrac{4n-1}{3n}$ $c_1 = 1$, $c_n = 3c_{n-1} + 5$ $d_1=2$, $d_2=5$, $d_n = 2d_{n-1} + d_{n-2}$

5. Escribe la expresión del término general de las siguientes sucesiones:

a) {–1, 1, –1, 1, –1, 1, –1, 1,…} b) {0, 3, 8, 15, 24, 35,…} c) {2, 4, 6, 8, 10,…} d) $\left\{\dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{5}{6}, \dfrac{7}{7}, \dfrac{9}{8}, \ldots\right\}$

6. En una sucesión el primer término es 2 y los demás se obtienen sumando 4 al término anterior. Hallar los 6 primeros términos de la sucesión.
7. Un satélite artificial se puso en órbita a las 17 horas y 30 minutos. Tarda en dar una vuelta completa a su órbita 87 minutos. A) Completa en tu cuaderno la tabla adjunta. B) Escribe una expresión general que te permita conocer la hora en que ha completado la vuelta *n*-ésima. C) Busca una expresión que te permita conocer la hora en función de la hora de la órbita anterior. D) Busca una expresión que te permita conocer la hora en función de la primera. E) ¿Cuántas vueltas completas habrá dado 20 días más tarde a las 14 horas?

Nº de órbitas	1	2	3	4	5	6
Hora en la que la ha completado						

2. PROGRESIONES ARITMÉTICAS

Ejemplo:

- *Alicia tiene en siete días un examen de Matemáticas. Decide prepararlo haciendo cada día tres ejercicios más que el día anterior. Empieza hoy haciendo dos ejercicios.* Si escribimos los ejercicios que va haciendo Alicia a medida que pasan los días, son: 2, 5, 8, 11, 14,…

Observamos que los términos de la sucesión van aumentando en una cantidad constante: 3. Este tipo de sucesiones se llaman *progresiones aritméticas*.

Una **progresión aritmética** es una sucesión de números reales en la que la diferencia entre dos términos consecutivos de la sucesión es constante. A esta constante se le llama **diferencia de la progresión** y se suele denotar con la letra *d*.

De otra forma, en una progresión aritmética se verifica:

$$a_{i+1} - a_i = d$$

Revisores: Javier Rodrigo y Nieves Zuasti
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez y Milagros Latasa Asso
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

siendo *i* cualquier número natural

Es decir, cada término se obtiene sumando al anterior la diferencia, *d*:

$$a_{i+1} = a_i + d$$

Ejemplo:

- La sucesión formada por los números naturales: {1, 2, 3, 4, 5,…} es una progresión aritmética, ya que cada término se obtiene sumando 1 al término anterior.

Actividades resueltas

- Si $a_1 = 3$ y $d = 2$, vamos a ver cómo se escriben los cinco primeros términos de la progresión aritmética:
  $a_1 = 3$, $a_2 = a_1 + d = 3 + 2 = 5$ $a_3 = a_2 + d = 5 + 2 = 7$ $a_4 = a_3 + d = 7 + 2 = 9$ $a_5 = a_4 + d = 9 + 2 = 11$

Actividades propuestas

8. Señala razonadamente si la siguiente sucesión es una progresión aritmética: {1, 10, 100, 1000, 100000, ….}.
9. Calcula los tres primeros términos de una progresión aritmética sabiendo que el primero es 1 y la diferencia es –2.

2.1. Término general de una progresión aritmética

Una progresión aritmética, al igual que ocurre con todas las sucesiones, queda perfectamente definida si conocemos su término general. Vamos a calcularlo utilizando la definición que hemos visto de progresión aritmética y suponiendo conocidos el primer término a_1 y la diferencia de la sucesión, *d*.

a_1 dado

$a_2 = a_1 + d$

$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$

$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$

$a_5 = a_4 + d = a_1 + 3d + d = a_1 + 4d$

…….

De forma general:

$$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-2)\cdot d + d = a_1 + (n-1)\, d$$

Por tanto, el **término general de una progresión aritmética** es:

$$a_n = a_1 + (n-1)\, d$$

Generalizando este resultado, podemos calcular el término general de una progresión aritmética conociendo *d* y otro término de la progresión, no necesariamente el primero:

Más general, el **término general de una progresión aritmética** es:

$$a_n = a_k + (n-k)\, d$$

Siendo a_k el término de la progresión que ocupa el lugar *k.*

NOTAS

1. **Dependiendo del valor de *d*, nos podemos encontrar con distintos tipos de progresiones aritméticas:**

a) Si $d > 0$, la progresión es creciente, es decir, cada término es mayor que los anteriores. Por ejemplo: {2, 4, 6, 8, …}
b) Si $d < 0$, la progresión es decreciente, es decir, cada término es menor que los anteriores. Por ejemplo: {12, 9, 6, 3, …}
c) Si $d = 0$, la progresión es constante, es decir, todos sus términos son iguales. Por ejemplo: {4, 4, 4, 4, …}

2. **Dependiendo de los datos que tengamos, calcularemos el término general de una progresión aritmética de una forma u otra:**

a. Si conocemos a_1 y *d*, hemos visto que: $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$
b. Si conocemos un término cualquiera a_i y d, sabemos que: $a_n = a_k + (n-k)\, d$
c. Si conocemos dos términos cualesquiera a_r y a_s, nos faltaría la diferencia *d* para poder aplicar la fórmula anterior. Pero, como sabemos que:

$$a_n = a_r + (n-r)\cdot d \quad \text{y que} \quad a_n = a_s + (n-s)\cdot d$$

podemos despejar *d* en función de *r*, *s*, a_r y a_s y nos queda: $d = \dfrac{a_r - a_s}{r - s}$

Actividades resueltas

- *Hallar el término general de una progresión aritmética cuyo primer término es* 7 *y su diferencia también es* 7.
  Basta con sustituir en la fórmula dada: $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d = 7 + (n-1)7 = 7 + 7n - 7 = 7n$.
- *Calcula el término que ocupa el lugar* 15 *en una progresión aritmética cuyo primer término es* 2 *y la diferencia es* 3.
  En este caso, $a_{15} = a_1 + (15-1)\cdot d = 2 + 14\cdot 3 = 2 + 42 = 44$.
- *Calcula el primer término de una progresión aritmética con* $a_5 = 6$ y $d = -2$.
  $a_5 = a_1 + (5-1)\cdot d$. Despejamos $a_1 = a_5 - 4d = 6 - 4\cdot(-2) = 14$.

Actividades propuestas

10. Dada una progresión aritmética dos de cuyos términos son: $a_3 = 4$ y $a_{10} = 18$. A) Calcula su diferencia.. B) Calcula su término general.
11. Calcula el primer término de una progresión aritmética con diferencia 2 y $a_{30} = 60$.
12. ¿Cuál es el término general de una progresión aritmética con $a_{22} = 45$ y $d = 3$?
13. Los lados de un pentágono están en progresión aritmética de diferencia 5. Sabiendo además que su perímetro es 65, calcula el valor de los lados.
14. Calcula los 5 primeros términos de una progresión aritmética de primer término 2 y de diferencia 3. Represéntalos gráficamente. Observa que su representación gráfica es un conjunto de puntos aislados que están sobre una recta.
15. Calcula la expresión general de las progresiones aritméticas:
    a) De diferencia $d = 2{,}5$ y de primer término 2.
    b) De diferencia $d = -2$ y de primer término 0.
    c) De diferencia $d = 1/3$ y de segundo término 5.
    d) De diferencia $d = 4$ y de quinto término 1.
16. ¿Cuántos múltiplos de 7 están comprendidos entre el 4 y el 893?

2.2. Suma de los términos de una progresión aritmética

En una progresión aritmética, la suma de dos términos equidistantes es constante.

Es decir, si los subíndices naturales p, q, r y s verifican que $p + q = r + s$, entonces: $a_p + a_q = a_r + a_s$

La demostración de esta propiedad es muy sencilla:

$a_p + a_q = a_1 + d\cdot(p - 1) + a_1 + d\cdot(q - 1) = 2a_1 + d\cdot(p + q - 2)$

$a_r + a_s = a_1 + d\cdot(r - 1) + a_1 + d\cdot(s - 1) = 2a_1 + d\cdot(r + s - 2)$

Y como: $p + q = r + s$, entonces: $a_p + a_q = a_r + a_s$

Queremos calcular la suma de los n términos de una progresión aritmética, S_n. Es decir:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

Aplicando la propiedad conmutativa de la suma, tenemos que:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots\ldots + a_3 + a_2 + a_1$$

Sumando estas dos igualdades término a término obtenemos:

$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots\ldots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$

Como se observa, los subíndices correspondientes a cada par de términos entre paréntesis suman n+1, por lo que la suma de sus términos será siempre la misma, entonces:

$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots\ldots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) = n\cdot(a_1 + a_n)$

Despejando S_n :

$$S_n = \frac{n\cdot(a_1 + a_n)}{2}$$

La **suma** de los n primeros términos de una **progresión aritmética** viene dada por:

$$S_n = \frac{n\cdot(a_1 + a_n)}{2}.$$

Actividades resueltas

Suma los 30 primeros términos de la progresión aritmética: $a_n = \{17, 13, 9, 5, 1, \ldots\}$.

Observamos que $d = -4$. Para aplicar la fórmula de la suma tenemos que calcular primero el término que ocupa el lugar 30, a_{30}:

$a_{30} = a_1 + (n - 1)d = 17 + (30 - 1)\cdot(-4) = 17 + 29\cdot(-4) = -99$

Entonces: $S_{30} = 30\cdot\frac{17 + (-99)}{2} = -1230$

- *Halla la suma de los números impares menores que* 1000.

  Tenemos que tener en cuenta que los números impares forman una progresión aritmética de diferencia 2 y además: $a_1 = 1$, $n = 500$, $a_{500} = 999$

  Entonces: $S_{500} = 500\cdot\frac{1 + 999}{2} = 250000$.

Actividades propuestas

17. Suma los 10 primeros términos de la progresión aritmética: {–5, 4, 13, 22, 31, 40, …}
18. Halla la suma de los 50 primeros múltiplos de 3.
19. En una sucesión aritmética de un número impar de términos el central vale 12, ¿cuánto valdrá la suma del primero más el

Textos Marea Verde

último?

20. El dueño de un pozo contrata a un zahorí para conocer la profundidad a la que se encuentra el agua y éste dictamina que a 5 m hay agua en abundancia. Pide un presupuesto a un contratista, que le dice que el primer metro le costará 50 euros y por cada medio metro más 6 euros más que por el medio anterior. ¿Cuánto le costará el pozo si se cumplen las predicciones?
21. Antonio se ha comprado un móvil, pero no puede pagarlo al contado. Paga 60 euros cada semana, pero el vendedor le sube 5 euros cada semana en concepto de pago aplazado. Logra pagarlo en 10 semanas. ¿Cuánto le costó? ¿Cuánto pagó de más? ¿Qué porcentaje supone este recargo sobre el precio de venta?
22. Un nadador se entrena en una piscina de 50 m y quiere controlar las pérdidas de velocidad por cansancio. Cronometra en cinco días consecutivos los tiempos que tarda en hacer 2, 5, 8, 11, 14 largos. A) Halla el término general de la sucesión a_n que da los metros recorridos en el día n. B) ¿Cuántos metros habrá nadado en dichos cronometrajes?

3. PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Ejemplo:

- *Un padre planea meter en una hucha* 1 € *el día que su hijo recién nacido cumpla un año y duplicar la cantidad en cada uno de sus cumpleaños.*

  Es decir, la sucesión cuyos términos son el dinero que mete en la hucha cada año es: {1, 2, 4, 8, 16,…}.

Observamos que los términos de la sucesión van aumentando de forma que cada término es el anterior multiplicado por 2. Este tipo de sucesiones se llaman progresiones geométricas.

Una **progresión geométrica** es una sucesión de números reales en la que el cociente entre cada término y el anterior es constante. A esta constante se denomina **razón de la progresión** y se suele denotar con la letra r. Es decir, $\frac{a_{i+1}}{a_i} = r$ siendo i un número natural y siempre que a_i sea distinto de cero.

O lo que es lo mismo, cada término se obtiene multiplicando el anterior por la razón r:

$$a_{i+1} = a_i \cdot r$$

Ejemplo:

- La sucesión: {1, 3, 9, 27, 81,…} es una progresión geométrica, ya que tomando dos términos cualesquiera consecutivos, siempre se obtiene el mismo cociente, que es 3, razón de la progresión.

$$3 : 1 = 9 : 3 = 27 : 9 = 81 : 27 = 3$$

3.1. Término general de una progresión geométrica

Una progresión geométrica, por ser una sucesión, queda totalmente definida si conocemos su término general. Vamos a obtenerlo sin más que aplicar la definición de progresión geométrica:

$a_2 = a_1 \cdot r$

$a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r \cdot r = a_1 \cdot r^2$

$a_4 = a_3 \cdot r = a_1 \cdot r^2 \cdot r = a_1 \cdot r^3$

$a_5 = a_4 \cdot r = a_1 \cdot r^3 \cdot r = a_1 \cdot r^4$

………

$a_n = a_{n-1} \cdot r = a_1 \cdot r^{n-2} \cdot r = a_1 \cdot r^{n-1}$

Por tanto, el **término general de una progresión geométrica** es:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Generalizando este resultado, podemos calcular el término general de una progresión geométrica conociendo r y otro término de la progresión, no necesariamente el primero:

Más general, el **término general de una progresión geométrica** es:

$$a_n = a_k \cdot r^{n-k}$$

siendo a_k el término de la progresión que ocupa el lugar k.

Ejemplo:

- La sucesión $a_n = 3 \cdot 5^{n-1}$ es una progresión geométrica.

NOTAS

1. Dependiendo del valor de r, nos podemos encontrar con distintos tipos de progresiones geométricas:

a) Si $r > 1$, la progresión es creciente, es decir, cada término es mayor que los anteriores. Por ejemplo: {2, 4, 8, 16, …}

b) Si $0 < r < 1$, la progresión es decreciente, es decir, cada término es menor que los anteriores. Por ejemplo: {90, 30, 10, 10/3, 10/9, …}

Revisores: Javier Rodrigo y Nieves Zuasti
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez y Milagros Latasa Asso
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

c) Si $r < 0$, la progresión es alternada, es decir, sus términos van cambiando de signo según el valor de n. Por ejemplo: {–2, 4, –8, 16, ...}
d) Si $r = 0$, la progresión es la progresión formada por ceros a partir del segundo término. Por ejemplo: {7, 0, 0, 0, }
e) Si $r = 1$, la progresión es la progresión constante formada por el primer término: {2, 2, 2, 2 ,...}

2. Dependiendo de los datos que tengamos, calcularemos el término general de una progresión geométrica de una forma u otra:

a) Si conocemos a_1 y r, hemos visto que: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$.
b) Si conocemos un término cualquiera a_k y r, sabemos que: $a_n = a_k \cdot r^{n-k}$
c) Si conocemos dos términos cualesquiera a_p y a_q, con a_p no nulo, nos falta conocer la razón r para poder aplicar la fórmula anterior. Pero, como sabemos que: $a_n = a_p \cdot r^{n-p}$ y que $a_n = a_q \cdot r^{n-q}$ podemos despejar r en función de p, q, a_p y a_q y nos queda: $r = \sqrt[q-p]{\dfrac{a_q}{a_p}}$

Actividades resueltas

- *Hallar el término general de una progresión geométrica cuyo primer término es* 7 *y su razón también es* 7.
  Basta con sustituir en la fórmula dada: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 7 \cdot 7^{n-1} = 7^n$.
- *Calcula el término que ocupa el lugar* 5 *en una progresión geométrica cuyo primer término es* 2 *y razón* 3.
  En este caso, $a_5 = a_1 \cdot r^{n-1} = 2 \cdot 3^{5-1} = 2 \cdot 3^4 = 162$.
- *Calcula el primer término de una progresión geométrica con* $a_3 = 6$ y $r = -2$.
  Despejamos a_1 de $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ y tenemos: $a_1 = \dfrac{a_n}{r^{n-1}}$. Para $n = 3$, tenemos: $a_1 = \dfrac{a_3}{r^2} = \dfrac{6}{(-2)^2} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$.

Actividades propuestas

23. Averigua la razón de una progresión geométrica cuyo primer término es 27 y el cuarto es 8.
24. El cuarto término de una progresión geométrica es 1/9 y la razón 1/3. Halla el primer término.
25. Halla el sexto término de la siguiente progresión geométrica: $\{\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, \ldots\}$
26. Dada una progresión geométrica dos de cuyos términos son: $a_3 = -8$ y $a_6 = -2048$. A) Calcula su razón. B) Calcula su término general.
27. Cierta clase de alga, llamada *clorella*, se reproduce doblando su cantidad cada dos horas y media. Al cabo de otras dos horas y media vuelve a doblar su cantidad, y así sucesivamente. Si se tiene en el momento inicial un kilo, al cabo de dos horas y media hay dos kilos. A) Haz una tabla de valores en la que indiques para cada periodo de reproducción el número de kilos de *clorella*. B) Indica el término general. C) Al cabo de 4 días, han transcurrido 40 periodos, ¿consideras posible este crecimiento?

3.2. Producto de los términos de una progresión geométrica

En una progresión geométrica, el producto de dos términos equidistantes es constante.
Es decir, si los subíndices naturales p, q, t y s verifican que $p + q = t + s$, entonces: $a_p \cdot a_q = a_t \cdot a_s$

La demostración de esta propiedad es muy sencilla:

$a_p \cdot a_q = a_1 \cdot r^{p-1} \cdot a_1 \cdot r^{q-1} = a_1^2 \cdot r^{p-1} \cdot r^{q-1} = a_1^2 \cdot r^{p+q-2}$

$a_t \cdot a_s = a_1 \cdot r^{t-1} \cdot a_1 \cdot r^{s-1} = a_1^2 \cdot r^{t-1} \cdot r^{s-1} = a_1^2 \cdot r^{t+s-2}$

Y como: $p + q = t + s$, entonces: $a_p \cdot a_q = a_t \cdot a_s$

Queremos calcular el producto de los n términos de una progresión geométrica, P_n. Es decir:

$P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots\ldots \cdot a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n$

Aplicando la propiedad conmutativa del producto, tenemos que:

$P_n = a_n \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdot \ldots\ldots \cdot a_3 \cdot a_2 \cdot a_1$

Multiplicando estas dos igualdades:

$P_n^2 = (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots\ldots \cdot a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n) \cdot (a_n \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdot \ldots\ldots \cdot a_3 \cdot a_2 \cdot a_1)$

$P_n^2 = (a_1 \cdot a_n) \cdot (a_2 \cdot a_{n-1}) \cdot (a_3 \cdot a_{n-2}) \cdot \ldots\ldots \cdot (a_{n-2} \cdot a_3) \cdot (a_{n-1} \cdot a_2) \cdot (a_n \cdot a_1)$

Como se observa, los subíndices correspondientes a cada par de términos entre paréntesis suman n+1, por lo que el producto será siempre el mismo en cada factor, entonces:

$P_n^2 = (a_1 \cdot a_n)^n$

Despejando P_n:

$P_n = \pm\sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n} = \pm a_1 \cdot r^{\frac{n-1}{2}}$

El signo será positivo o negativo dependiendo de la progresión.

El **producto** de los n primeros términos de una progresión **geométrica** viene dado por:

$$P_n = \pm\sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n} = \pm a_1 \cdot r^{\frac{n-1}{2}}$$

Actividades resueltas

- *Halla el producto de los siete primeros términos de una progresión geométrica cuyo primer término es* $a_1 = -1/8$ *y razón* $r = 2$

Observamos que todos los términos de la sucesión son todos negativos, por lo que el producto de un número par de términos es positivo y que el producto de un número impar es negativo. Calculamos a_7 para poder utilizar la fórmula deducida anteriormente: $a_7 = a_1 r^{n-1} = --\ 2^{7-1} = (-1/8)\cdot 2^6 = -8$. Entonces: $P_7 = \pm\sqrt{[(-1/8)(-8)]^7} = -1$

Actividades propuestas

28. El primer término de una progresión geométrica es 3 y el octavo 384. Halla la razón y el producto de los 8 primeros términos.
29. Calcula el producto de los 5 primeros términos de la progresión: 3, 6, 12, 24, …

3.3. Suma de los términos de una progresión geométrica

A) Suma de un número <u>limitado</u> de términos consecutivos de una progresión geométrica

Ejemplo:

- Juan ha comprado 20 libros, por el 1º ha pagado 1 €, por el 2º, 2 €, por el 3º, 4 €, por el 4º, 8 € y así sucesivamente. ¿Cómo podemos saber lo que ha pagado en total sin necesidad de hacer la suma?

Se trata de una progresión geométrica con $a_1 = 1$ y $r = 2$. Se trataría de calcular: $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{20}$. Vamos a verlo en general, para una progresión geométrica cualquiera:

Queremos calcular: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$. Para ello, multiplicamos esta igualdad por r:

$$r \cdot S_n = r \cdot a_1 + r \cdot a_2 + r \cdot a_3 + \ldots + r \cdot a_{n-1} + r \cdot a_n$$

Pero como: $a_2 = r \cdot a_1$

$a_3 = r \cdot a_2$

$a_4 = r \cdot a_3$

….

$a_n = r \cdot a_{n-1}$

La igualdad anterior queda:

$$r \cdot S_n = a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + r \cdot a_n$$

Restando:

$$\begin{array}{rl} r \cdot S_n = & a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + r \cdot a_n \\ - \quad S_n = & a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n \end{array}$$

$$r \cdot S_n - S_n = -a_1 + r \cdot a_n$$

$(r-1) \cdot S_n = r \cdot a_n - a_1 \qquad S_n = \dfrac{r \cdot a_n - a_1}{r-1}$ siempre que $r \neq 1$, y como $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

Entonces:

$S_n = \dfrac{a_1(r^n - 1)}{r-1}$ siempre que $r \neq 1$.

La **suma** de los n primeros términos de una progresión **geométrica** viene dada por:

$$S_n = \frac{r \cdot a_n - a_1}{r-1} = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1} \text{ siempre que } r \neq 1.$$

Se considera $r \neq 1$ ya que si $r = 1$ la progresión es la progresión constante formada por el primer término: $\{a_1, a_1, a_1, a_1, \ldots\}$ y $S_n = n \cdot a_1$

Analicemos la suma según los distintos valores de r:

a) <u>Si $|r| > 1$,</u> los términos en valor absoluto crecen indefinidamente y el valor de S_n viene dado por la fórmula anterior.

Revisores: Javier Rodrigo y Nieves Zuasti
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez y Milagros Latasa Asso
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Textos Marea Verde

b) Si $|r| < 1$, la suma de sus términos cuando n es grande se aproxima a $S_n \approx \frac{a_1}{1-r}$, ya que si en $S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1}$ elevamos la razón $|r| < 1$ a una potencia, cuanto mayor sea el exponente n, menor será el valor de r^n y si n es suficientemente grande, r^n se aproxima a 0. Por eso,

$$S_n \approx \frac{a_1 \cdot (-1)}{r-1} = \frac{a_1}{1-r}$$

c) Si $r = -1$, los términos consecutivos son opuestos:$\{a_1, -a_1, a_1, -a_1, \ldots\}$ y S_n es igual a cero si n es par, e igual a a_1 si n es impar. La suma de la serie oscila entre esos dos valores.

Actividades resueltas

- *Hallar la suma de los* 11 *primeros términos de una progresión geométrica sabiendo que el primer término es* –2 *y la razón* –3.

$$S_n = \frac{r \cdot a_n - a_1}{r-1} = \frac{(-2)\left[(-3)^{11} - 1\right]}{-3-1} = -88574.$$

- *Hallar la suma de los* 7 *primeros términos de una progresión geométrica sabiendo que el séptimo término es* 20480, *el primero es* 5 *y la razón es* 4.

Ahora utilizamos la fórmula: $S_n = \frac{r \cdot a_n - a_1}{r-1}$. Sustituyendo: $S_7 = \frac{r\, a_7 - a_1}{r-1} = \frac{20480 \cdot 4 - 5}{4-1} = 27305.$

Actividades propuestas

30. Un agricultor en su granja tiene 59049 litros de agua para dar de beber a los animales. Un día utilizó la mitad del contenido, al siguiente la mitad de lo que le quedaba y así sucesivamente cada día. ¿Cuántos litros de agua utilizó hasta el sexto día?
31. Suma los quince primeros términos de una progresión geométrica en la que $a_1 = 5$ y $r = ½$

B) Suma de un número ilimitado de términos consecutivos de una progresión geométrica

¿Qué ocurrirá si repetimos el proceso anterior indefinidamente? Es decir, ¿qué ocurrirá si sumamos un número ilimitado de términos?

Dependiendo del valor de r será posible o no obtener la suma de un número ilimitado de términos:

a) Si $r = 1$, la progresión es la progresión constante formada por el primer término: $\{a_1, a_1, a_1, a_1, \ldots\}$ y si a_1 es positivo la suma de los términos será cada vez mayor (si fuera a_1 negativo sería la suma cada vez mayor en valor absoluto, pero negativa). Por tanto, si el número de términos es ilimitado, esta suma será infinita.

b) Si $|r| > 1$, los términos crecen indefinidamente y el valor de S_n para un número ilimitado de términos, también será infinito.

c) Si $|r| < 1$, la suma de sus términos se aproxima cuando n es grande a $S_n \approx \frac{a_1}{1-r}$.

Observamos que la suma no depende del número de términos, ya que al hacerse cada vez más pequeños, llega un momento en que no se consideran.

d) Si $r = -1$, los términos consecutivos son opuestos: $\{a_1, -a_1, a_1, -a_1, \ldots\}$ y S_n es igual a cero si n es par, e igual a a_1 si n es impar. La suma de la serie oscila entre esos dos valores para un número finito de términos. Para un número de términos ilimitado no sabemos si es par o impar, con lo que la suma no se puede realizar a no ser que $a_1 = 0$, caso en que $S = 0 = \frac{a_1}{1-r}$. En el resto de los casos decimos que la suma de infinitos términos no existe pues su valor es oscilante.

e) Si $r < -1$, los términos oscilan entre valores positivos y negativos, creciendo en valor absoluto. La suma de sus infinitos términos no existe pues su valor también es oscilante.

En resumen,

La **suma** de un número **ilimitado** de términos de una **progresión geométrica** sólo toma un valor finito si $|r| < 1$, y entonces viene dada por: $S = \frac{a_1}{1-r}$ En el resto de los casos, o vale infinito, o no existe pues oscila.

Revisores: Javier Rodrigo y Nieves Zuasti
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez y Milagros Latasa Asso
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades resueltas

- *Calcula la suma de todos los términos de la progresión geométrica cuyo primer término es* 4 *y la razón* 1/2.

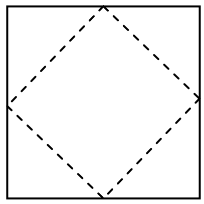
$$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{4}{1-\frac{1}{2}} = 8$$

- *En una progresión geométrica la razón es* 1/4 *y la suma de todos sus términos es* 8. *¿Cuánto vale el primer término?*

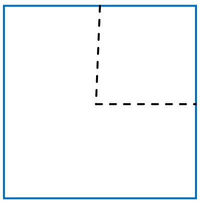
Despejamos a_1 de: $S = \dfrac{a_1}{1-r}$ y: $a_1 = S\,(1 - r) = 8\cdot(1 - 1/4) = 6$

Actividades propuestas

32. Calcula la suma de los infinitos términos de la sucesión: 6, 3, 3/2, 3/4,…



33. Tenemos en la mano un cuadrado de área 1. Cortamos las cuatro esquinas por los puntos medios de los lados. El nuevo cuadrado, ¿qué área tiene? Dejamos los recortes encima de la mesa. ¿Qué área de recortes hay sobre la mesa? Con el nuevo cuadrado que tenemos en la mano efectuamos la misma operación de cortar las cuatro esquinas y dejarlas sobre la mesa, y así sucesivamente. ¿Qué área tienen los sucesivos cuadrados que tengo en la mano? ¿Y los recortes que quedan sobre la mesa? Halla la suma de las infinitas áreas de recortes así obtenidas.



34. De nuevo tenemos un cuadrado de área 1 en la mano, y lo cortamos por las líneas de puntos como indica la figura. El trozo mayo lo dejamos sobre la mesa y nos quedamos en la mano con el cuadrado, al que volvemos a cortar de la misma forma. Y así sucesivamente. ¿Qué área tienen los sucesivos cuadrados que tengo en la mano? ¿Crecen o disminuyen? Escribe el término general de la sucesión de áreas que tenemos en la mano. ¿Y los recortes que quedan sobre la mesa? ¿Crece el área o disminuye? Vamos sumando áreas, calcula la suma de estas áreas si hubiéramos hecho infinitos cortes.

3.4. Aplicaciones de las progresiones geométricas

Fracción generatriz

El curso pasado estudiaste cómo pasar de un decimal periódico puro o periódico mixto a una fracción. Ahora vamos a utilizar las progresiones geométricas para que comprendas mejor el proceso.

Ejemplo:

- *Si tenemos un **número decimal periódico puro**, lo podemos escribir como:*

$$2,\widehat{37} = 2 + 0,37 + 0,0037 + 0,000037\ldots$$

O lo que es lo mismo: $2 + \dfrac{37}{100} + \dfrac{37}{100\cdot 100} + \dfrac{37}{100\cdot 100\cdot 100} + \ldots$ donde los sumandos a partir del segundo forman una progresión geométrica de razón $r = \dfrac{1}{100} < 1$, cuya suma infinita vale: $S = \dfrac{a_1}{1-r}$.

Por tanto: $2 + \dfrac{\frac{37}{100}}{1-\frac{1}{100}} = 2 + \dfrac{\frac{37}{100}}{\frac{99}{100}} = 2 + \dfrac{37}{99} = \dfrac{198}{99} + \dfrac{37}{99} = \dfrac{235}{99}$

- *Si tenemos un **número decimal periódico mixto**, se utiliza un proceso similar:*

$$1,32\widehat{8} = 1,32 + 0,008 + 0,0008 + \ldots$$

O lo que es lo mismo: $1,32 + \dfrac{8}{1000} + \dfrac{8}{1000\cdot 10} + \dfrac{8}{1000\cdot 10\cdot 10} + \ldots$ En este caso, los sumandos a partir del segundo forman una progresión geométrica de razón $r = \dfrac{1}{10} < 1$. Por tanto:

$$1,32 + \frac{\frac{8}{1000}}{1-\frac{1}{10}} = 1 + 0,32 + \frac{8}{900} = 1 + \frac{32}{100} + \frac{8}{900} = 1 + \frac{296}{900}$$

Nota

Con este proceso estamos ilustrando el concepto de fracción generatriz como aplicación de las progresiones geométricas, pero a efectos prácticos, es más cómodo efectuarlo según el proceso visto.

Capitalización compuesta

El interés compuesto lo estudiarás detenidamente en el capítulo 6, pero ahora es interesante que sepas que entonces vas a usar las progresiones geométricas para calcularlo, y que tienes una hoja de cálculo para hacer las operaciones.

Si depositamos en una entidad financiera una cantidad de dinero C_0 durante un tiempo t y un rédito r dado en tanto por uno, obtendremos un beneficio: $I = C_0 \cdot r \cdot t$ llamado **interés.**

La principal característica de la capitalización compuesta es que los intereses que se generan en un año, pasan a formar parte del capital inicial y producen intereses en los periodos siguientes.

Entonces:

- Al final del *primer año*, el capital será el capital inicial C_0 junto con los intereses producidos durante ese año. Es decir:

$$C_1 = C_0 + I = C_0 + C_0 \cdot r \cdot 1 = C_0 \cdot (1 + r)$$

- Al final del *segundo año*, el capital que tendremos será el capital que teníamos al finalizar el primer año más los intereses producidos ese segundo año. Es decir:

$$C_2 = C_1 + C_1 \cdot r \cdot 1 = C_1 \cdot (1 + r) = C_0 \cdot (1 + r) \cdot (1 + r) = C_0 \cdot (1 + r)^2$$

Observando los capitales obtenidos: $C_1, C_2, \ldots, C_n$ concluimos que se trata de una progresión geométrica de razón $(1 + r)$. Por tanto:

- El *año n-ésimo*, tendremos:

El capital final obtenido después de n años dado un capital inicial C_0 y un rédito r dado en tanto por uno, es:

$$C_n = C_0 \cdot (1 + r)^n$$

Actividades resueltas

- *Veamos la fracción generatriz de* $23,\overline{45}$ *como aplicación de las progresiones geométricas.*

$$23,\overline{45} = 23 + 0,45 + 0,0045 + 0,000045 + \ldots$$

O lo que es lo mismo: $23 + \frac{45}{100} + \frac{45}{100 \cdot 100} + \frac{45}{100 \cdot 100 \cdot 100} + \ldots$ donde los sumandos a partir del segundo forman una progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{100} < 1$, cuya suma infinita vale: $S = \frac{a_1}{1 - r}$. Por tanto:

$$23 + \frac{\frac{45}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = 23 + \frac{\frac{45}{100}}{\frac{99}{100}} = 23 + \frac{45}{99} = \frac{2277}{99} + \frac{45}{99} = \frac{2322}{99} = \frac{258}{11}.$$

- *Depositamos en un banco* 1500 € *al* 3,5 % *de capitalización compuesta durante tres años. ¿Cuánto dinero tendríamos al finalizar el tercer año?*

Utilizamos la expresión: $C_t = C_0 \cdot (1 + r)^t$ donde $C_0 = 1500$ €, $r = 0,035$ pues es el tanto por uno y $t = 3$ años. Por tanto: $C_t = C_0 \cdot (1 + r)^t = 1500(1 + 0,035)^3 = 1663,08$ €

Actividades propuestas

35. Calcula la fracción generatriz del número $4,5\overset{\frown}{6}\overset{\frown}{1}$.
36. Un empresario acude a una entidad financiera para informarse sobre cómo invertir los 6000 € de beneficios que ha tenido en un mes. Le plantean dos opciones.
    a) Mantener ese capital durante 5 años al 3,5 % anual o
    b) Recibir el 5 % del capital durante los dos primeros años y el 3 % los tres años restantes. ¿Qué opción le interesa más?

RESUMEN

Concepto	*Definición*	*Ejemplos*
Progresión aritmética	Es una sucesión de números reales en la que la diferencia entre dos términos consecutivos de la sucesión es constante. A esta constante se le llama diferencia de la progresión y se suele denotar con la letra *d*.	2, 5, 8, 11, 14, 17, …
Término general	$a_n = a_k + (n - k)$ siendo a_k el término que ocupa el lugar k	$a_n = 2 + 3n$

Suma de los *n* primeros términos	$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$	S_8 = (8/2)·(2 + (2 + 3·8)) = 4 · (4 + 24) = 4 · 28 = 112
Progresión geométrica	Es una sucesión de números reales en la que el cociente entre cada término y el anterior es constante. A esta constante se denomina razón de la progresión y se suele denotar con la letra *r*. Es decir, $\frac{a_{i+1}}{a_i} = r$ siendo *i* un número natural.	3, 6, 12, 24, … 1, 1/2, 1/4, 1/8…
Término general	$a_n = a_k \cdot r^{n-k}$ siendo a_k el término de la sucesión que ocupa el lugar *k*	$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ $a_n = 1 \cdot (1/2)^n$
Suma	- Para $r \neq 1$, y un número finito de términos: $S_n = \frac{r \cdot a_n - a_1}{r-1} = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1}$ - Para $r \neq 1$, y una cantidad ilimitada de términos: $S = \frac{a_1}{1-r}$	$S_8 = 3(2^8 - 1)/(2 - 1) =$ 3(256 – 1) = 3(255) = 765. $S = 1/(1 - 1/2) = 2$
Producto de los *n* primeros términos	$P_n = \pm\sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n} = \pm a_1 \cdot r^{\frac{n-1}{2}}$	$P_9 = +\sqrt{(3 \cdot 3 \cdot 2^8)^9} = (3 \cdot 2^4)^9$

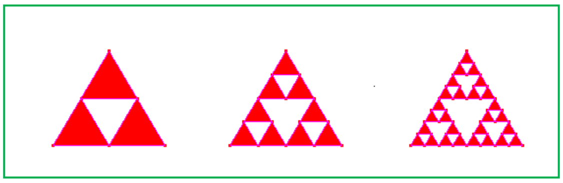
EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

1. Calcula el término que ocupa el lugar 100 de una progresión aritmética cuyo primer término es igual a 4 y la diferencia es 5.
2. El décimo término de una progresión aritmética es 45 y la diferencia es 4. Halla el primer término.
3. Sabiendo que el primer término de una progresión aritmética es 4, la diferencia 7 y el término *n*-ésimo 88, halla *n*.
4. Halla el primer término de una progresión aritmética y la diferencia, sabiendo que $a_3 = 24$ y $a_{10} = 66$.
5. El término sexto de una progresión aritmética es 4 y la diferencia 1/2. Halla el término 20.
6. Calcula los lados de un triángulo rectángulo sabiendo que sus medidas, expresadas en metros, están en progresión aritmética de diferencia 3.
7. Halla tres números que estén en progresión aritmética y tales que, aumentados en 5, 4 y 7 unidades respectivamente, sean proporcionales a 5, 6 y 9.
8. Calcula la suma de los múltiplos de 59 comprendidos entre 1000 y 2000.
9. El producto de tres términos consecutivos de una progresión aritmética es 80 y la diferencia es 3. Halla dichos términos.
10. ¿Cuántos términos hay que sumar de la progresión aritmética 2, 8, 14,... para obtener como resultado 1064?
11. La suma de *n* números naturales consecutivos tomados a partir de 11 es 1715. ¿Cuántos términos hemos sumado?
12. Sabiendo que el quinto término de una progresión aritmética es 18 y la diferencia es 2, halla la suma de los nueve primeros términos de la sucesión.
13. La suma de tres números en progresión aritmética es 33 y su producto 1287. Halla estos números.
14. Tres números en progresión aritmética tienen por producto 16640; el más pequeño vale 20. Halla los otros dos.
15. El producto de cinco números en progresión aritmética es 12320 y su suma 40. Halla estos números sabiendo que son enteros.
16. Calcula tres números sabiendo que están en progresión aritmética, que su suma es 18 y que la suma del primero y del segundo es igual al tercero disminuido en dos unidades.
17. La suma de los once primeros términos de una progresión aritmética es 176 y la diferencia de los extremos es 30. Halla los términos de la progresión.
18. Halla cuatro números en progresión aritmética, conociendo su suma, que es 22, y la suma de sus cuadrados, 166.
19. La diferencia de una progresión aritmética es 4. El producto de los cuatro primeros términos es 585. Halla los términos.
20. Halla los seis primeros términos de una progresión aritmética sabiendo que los tres primeros suman –3 y los tres últimos 24.
21. En una progresión aritmética el onceavo término excede en 2 unidades al octavo, y el primero y el noveno suman 6.

Calcula la diferencia y los términos mencionados.

22. En una progresión aritmética, los términos segundo y tercero suman 19, y los términos quinto y séptimo suman 40. Hállalos.
23. Sabiendo que las medidas de los tres ángulos de un triángulo están en progresión aritmética y que uno de ellos mide 100º, calcula los otros dos.
24. Halla las dimensiones de un ortoedro sabiendo que están en progresión aritmética, que suman 78 m y que el volumen del ortoedro es de 15470 m.
25. Los seis ángulos de un hexágono están en progresión aritmética. La diferencia entre el mayor y el menor es 60º. Calcula el valor de cada ángulo.
26. Las longitudes de los tres lados de un triángulo rectángulo están en progresión aritmética y suman 36 metros. ¿Cuánto mide cada lado?
27. Un coronel manda 5050 soldados y quiere formar con ellos un triángulo para una exhibición, de modo que la primera fila tenga un soldado, la segunda dos, la tercera tres, etc. ¿Cuántas filas tienen que haber?
28. Por el alquiler de una casa se acuerda pagar 800 euros al mes durante el primer año, y cada año se aumentará el alquiler en 50 euros mensuales. ¿Cuánto se pagará mensualmente al cabo de 12 años?
29. Las edades de cuatro hermanos forman una progresión aritmética, y su suma es 32 años. El mayor tiene 6 años más que el menor. Halla las edades de los cuatro hermanos.
30. Un esquiador comienza la pretemporada de esquí haciendo pesas en un gimnasio durante una hora. Decide incrementar el entrenamiento 10 minutos cada día. ¿Cuánto tiempo deberá entrenar al cabo de 15 días? ¿Cuánto tiempo en total habrá dedicado al entrenamiento a lo largo de todo un mes de 30 días?
31. En una sala de cine, la primera fila de butacas dista de la pantalla 86 dm, y la sexta, 134 dm. ¿En qué fila estará una persona si su distancia a la pantalla es de 230 dm?
32. Calcula el término onceavo de una progresión geométrica cuyo primer término es igual a 1 y la razón es 2.
33. El quinto término de una progresión geométrica es 81 y el primero es 1. Halla los cinco primeros términos de dicha progresión.
34. En una progresión geométrica de primer término 7 y razón 2, un cierto término es 28672. ¿Qué lugar ocupa dicho término?
35. Sabiendo que el séptimo término de una progresión geométrica es 1 y la razón 1/2, halla el primer término.
36. En una progresión geométrica se sabe que el término decimoquinto es igual a 512 y que el término décimo es igual a 16. Halla el primer término y la razón.
37. Descompón el número 124 en tres sumandos que formen progresión geométrica, siendo 96 la diferencia entre el mayor y el menor.
38. El volumen de un ortoedro es de 3375 cm^3. Halla la longitud de sus aristas, sabiendo que están en progresión geométrica y que la arista intermedia mide 10 cm más que la menor.
39. Halla el producto de los ocho primeros términos de la progresión 3, 6, 12, 24,...
40. Halla la suma de los diez primeros términos de la progresión geométrica 3, 6, 12, 24,...
41. La suma de los ocho primeros términos de una progresión geométrica es 17 veces la suma de los cuatro primeros. Halla el valor de la razón.
42. Halla la suma de los términos de la progresión ilimitada: 8, 4, 2, 1,...
43. Halla tres números en progresión geométrica sabiendo que su suma es 26 y su producto 216.
44. Calcula el producto de los once primeros términos de una progresión geométrica sabiendo que el término central vale 2.
45. Tres números en progresión geométrica suman 525 y su producto vale un millón. Calcula dichos números.
46. Determina cuatro números en progresión geométrica de manera que los dos primeros sumen 0,5 y los dos últimos 0,125.
47. ¿Cuántos términos se han tomado en una progresión geométrica, sabiendo que el primer término es 7, el último 448 y su suma 889?
48. La suma de los siete primeros términos de una progresión geométrica de razón 3 es 7651. Halla los términos primero y séptimo.
49. Halla tres números en progresión geométrica cuyo producto es 328509, sabiendo que el mayor excede en 115 a la suma de los otros dos.
50. Tres números están en progresión geométrica; el segundo es 32 unidades mayor que el primero, y el tercero, 96 unidades mayor que el segundo. Halla los números.
51. Halla los cuatro primeros términos de una progresión geométrica, sabiendo que el segundo es 20 y la suma de los cuatro primeros es 425.
52. Halla los ángulos de un cuadrilátero, si se sabe que están en progresión geométrica y que el mayor es 27 veces el menor.
53. Las dimensiones de un ortoedro están en progresión geométrica. Calcula estas dimensiones sabiendo que su perímetro es 420 m y su volumen 8000 m^3.

54. Divide el número 221 en tres partes enteras que forman una progresión geométrica tal que el tercer término sobrepasa al primero en 136.
55. La suma de tres números en progresión geométrica es 248 y la diferencia entre los extremos 192. Halla dichos números.
56. Halla cuatro números en progresión geométrica sabiendo que la suma de los dos primeros es 28 y la suma de los dos últimos 175.
57. En una progresión geométrica, los términos primero y decimoquinto son 6 y 54, respectivamente. Halla el término sexto.
58. Una progresión geométrica tiene cinco términos, la razón es igual a la cuarta parte del primer término y la suma de los dos primeros términos es 24. Halla los cinco términos.
59. Halla x para que $x - 1$, $x + 1$, $2(x + 1)$ estén en progresión geométrica.
60. A una cuerda de 700 m de longitud se le dan dos cortes, de modo que uno de los trozos extremos tiene una longitud de 100 m. Sabiendo que las longitudes de los trozos están en progresión geométrica, determina la longitud de cada trozo.
61. Halla la fracción generatriz del número decimal 0,737373..., como suma de los términos de una progresión geométrica ilimitada.
62. Se tiene una cuba de vino que contiene 1024 litros. El 1 de octubre se vació la mitad del contenido; al día siguiente se volvió a vaciar la mitad de lo que quedaba, y así sucesivamente todos los días. ¿Qué cantidad de vino se sacó el día 10 de octubre?
63. Dado un cuadrado de 1 m de lado, unimos dos a dos los puntos medios de sus lados; obtenemos un nuevo cuadrado, en el que volvemos a efectuar la misma operación, y así sucesivamente. Halla la suma de las infinitas áreas así obtenidas.
64. Tres números cuya suma es 36 están en progresión aritmética. Halla dichos números sabiendo que si se les suma 1, 4 y 43, respectivamente, los resultados forman una progresión geométrica.
65. Triángulo de Sierspinky: Vamos a construir un fractal. Se parte de un triángulo equilátero. Se unen los puntos medios de los lados y se forman cuatro triángulos. Se elimina el triángulo central. En cada uno de los otros tres triángulos se repite el proceso. Y así sucesivamente. A la figura formada por iteración infinita se la denomina Triángulo de Sierspinky, y es un fractal. Imagina que el primer triángulo tiene un área A. Cuando aplicamos la primera iteración, el área es (3/4)A. ¿Y en la segunda? Escribe la sucesión de las áreas. ¿Es creciente o decreciente? Imagina ahora que la longitud de cada lado del triángulo inicial es L. Escribe la sucesión de las longitudes. ¿Es creciente o decreciente?



AUTOEVALUACIÓN

1. ¿Cuál es la razón de la siguiente progresión geométrica: a_n $5 \cdot 3^{n-1}$?
   a) 5 b) 3 c) 2 d) No es una progresión geométrica
2. En la sucesión de múltiplos de 13, el 169 ocupa el lugar:
   a) 1 b) 2 c) 13 d) 169
3. La suma de los diez primeros términos de la progresión aritmética: 7, 13, 19, 31,… es:
   a) 170 b) 34 c) 19 d) 340
4. La sucesión 5, 15, 45, 135, 405, 1215...:
   a) Es una progresión geométrica de razón 5 b) Es una progresión aritmética de diferencia 5
   c) Es una progresión geométrica de razón 3 d) Es una progresión aritmética de diferencia 3.
5. Sea la sucesión: 2, 10, 50, 250, 1250... su término general es:
   a) $a_n = 2 \cdot 5^{n-1}$ b) $a_n = 2 \cdot 2^{n-1}$ c) $a_n = 5 \cdot 5^{n-1}$ *d)* $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$
6. ¿Cuánto suman las potencias de 2 comprendidas entre 2^1 y 2^{10}?
   a) 1022 b) 2046 c) 1024 d) 2048
7. La progresión aritmética cuyo primer término es 1 y su diferencia 2, tiene como término general:
   a) $a_n = 2n$ b) $a_n = 2n + 1$ c) $a_n = 2n - 1$ d) $a_n = 2n - 2$
8. ¿Cuál es el valor de la suma: 1 + 3 + 5 + 7 + ... + 999?
   a) 500.000 b) 250.000 c) 50000 d) 25000
9. María está preparando el examen de selectividad. Para no dejar toda la materia para el final ha decidido estudiar cada día el doble de páginas que el día anterior. Si el primer día estudió tres páginas, ¿cuántas habrá estudiado al cabo de 7 días?
   a) 381 b) 192 c) 765 d) 378
10. A Roberto le han tocado 6000 € en la lotería y decide depositarlos en el banco a un tipo de interés compuesto del 4 %. ¿Cuánto dinero tendrá al cabo de 5 años?
   a) 6240 € b) 6104 € c) 7832,04 € d) 7299,92 €

CAPÍTULO 4: EXPRESIONES ALGEBRAICAS. POLINOMIOS.
Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas: 3º B de ESO

1. INTRODUCCIÓN. EXPRESIONES ALGEBRAICAS

1.1. Introducción

No hace falta imaginar situaciones rebuscadas para que, a la hora de realizar un razonamiento, nos topemos con alguna de las cuatro operaciones matemáticas básicas: suma, resta, multiplicación o división.

Ejemplos:

- El padre, la madre y el hijo han ido al cine y las entradas han costado 27 euros. Para calcular el precio de cada entrada se divide entre 3: 27/ 3 = 9 euros.
- Si vamos a comprar pasta de té y el precio de un kilogramo es de 18’3 euros, resulta habitual que, según va la dependienta introduciendo pastas en una bandeja, vayamos viendo el importe final. Para ello si la bandeja está sobre una balanza, ejecutamos la operación 18’3·*x* donde *x* es la cantidad de kilogramos que nos ha indicado la balanza. Después de cada pesada, el resultado de esa multiplicación refleja el importe de las pastas que, en ese momento, contiene la bandeja.
- Supongamos que tenemos un contrato con una compañía de telefonía móvil por el que pagamos 5 céntimos de euro por minuto, así como 12 céntimos por establecimiento de llamada. Con esa tarifa, una llamada de 3 minutos nos costará:

$$(0'05 \cdot 3) + 0'12 = 0'15 + 0'12 = 0'27 \text{ euros}$$

Pero ¿cuál es el precio de una llamada cualquiera? Como desconocemos su duración, nos encontramos con una cantidad no determinada, o indeterminada, por lo que en cualquier respuesta que demos a la pregunta anterior se apreciará la ausencia de ese dato concreto. Podemos decir que el coste de una llamada cualquiera es

$$(0'05 \cdot x) + 0'12 = 0'05 \cdot x + 0'12 \text{ euros}$$

donde x señala su duración, en minutos.

Actividades propuestas

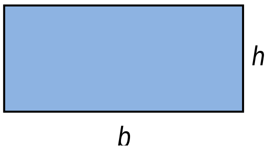
1. A finales de cada mes la empresa de telefonía móvil nos proporciona la factura mensual. En ella aparece mucha información, en particular, el número total de llamadas realizadas (*N*) así como la cantidad total de minutos de conversación (*M*). Con los datos del anterior ejemplo, justifica que el importe de las llamadas efectuadas durante ese mes es:

$$(0'05 \cdot M) + (0'12 \cdot N) = 0'05 \cdot M + 0'12 \cdot N \text{ euros}$$

Ejemplo:

- Es bien conocida la *fórmula* del área de un rectángulo de base *b* y altura asociada *h*:

A = *b*·*h*



En todos estos ejemplos han surgido **expresiones algebraicas**.

1.2. Expresiones algebraicas

Llamaremos **expresión algebraica** a cualquier expresión matemática que se construya con números y las operaciones matemáticas básicas: suma, resta, multiplicación y/o división. En una expresión algebraica puede haber datos no concretados; según el contexto, recibirán el nombre de ***variable***, ***indeterminada***, ***parámetro***, entre otros.

Si en una expresión algebraica no hay *variables*, dicha expresión no es más que un número:

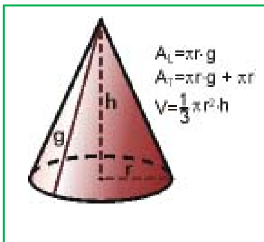
Ejemplo:

$$\frac{3\cdot(-7)}{\frac{4}{5}-\frac{2}{3}}+1=\frac{-21}{\frac{4\cdot 3}{5\cdot 3}-\frac{2\cdot 5}{3\cdot 5}}+1=\frac{-21}{\frac{12}{15}-\frac{10}{15}}+1=\frac{-21}{\frac{2}{15}}+1=\frac{-21\cdot 15}{2}+1=\frac{-315}{2}+1=\frac{-315}{2}+\frac{2}{2}=\frac{-313}{2}$$

Al fijar un valor concreto para cada *indeterminada* de una expresión algebraica aparece un número, el **valor numérico** de esa expresión algebraica para tales valores de las indeterminadas.

Ejemplo:

- El volumen de un cono viene dado por la expresión algebraica: $V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$



en la que *r* es el radio del círculo base y *h* es su altura. De este modo, el volumen de un cono cuya base tiene un radio de 10 cm y de altura 15 cm es igual a:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot 10^2 \cdot 15 = 500 \cdot \pi \, cm^3.$$

- El área lateral del cono viene dada por $A_L = \pi \cdot r \cdot g$, donde r es el radio de la base y g la generatriz. La superficie total es $A_T = \pi \cdot r \cdot g + \pi \cdot r^2$.
- La expresión algebraica que representa el producto de los cuadrados de dos números cualesquiera x e y se simboliza por $x^2 \cdot y^2$. Si en ella fijamos $x = -2$ e $y = \frac{3}{5}$ resulta $(-2)^2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 4 \cdot \frac{9}{25} = \frac{36}{25}$.
- Si en la expresión $7 + \frac{x}{2} + x \cdot y^3 - \frac{6}{z}$ particularizamos las tres variables con los valores $x = 4$, $y = -1$, $z = \frac{1}{2}$ surge el número $7 + \frac{4}{2} + 4 \cdot (-1)^3 - \frac{6}{1/2} = 7 + 2 - 4 - 12 = -7$

En una expresión algebraica puede no tener sentido otorgar algún valor a cierta indeterminada. En efecto, en el último ejemplo no es posible hacer $z = 0$.

Actividades propuestas

2. Escribe las expresiones algebraicas que nos proporcionan la longitud de una circunferencia y el área de un trapecio.
3. Reescribe, en lenguaje algebraico, los siguientes enunciados, referidos a dos números cualesquiera x e y:
   a) El triple de su diferencia b) La suma de sus cuadrados c) El cuadrado de su suma
   d) El inverso de su producto e) La suma de sus opuestos d) El producto de sus cuadrados
4. Una tienda de ropa anuncia en sus escaparates que está de rebajas y que todos sus artículos están rebajados un 30 % sobre el precio impreso en cada etiqueta. Escribe lo que pagaremos por una prenda en función de lo que aparece en su etiqueta.
5. Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para el valor o valores que se indican:
   a) $-3x^2 + \frac{4}{x} - 5$ para $x = -2$. b) $3b + \frac{a+b}{2-b^3} + a \cdot b^2 - 1$ para $a = \frac{1}{3}$ y $b = \frac{1}{2}$.
6. Indica, en cada caso, el valor numérico de la expresión $x - 2y + 3z$:
   a) $x = 1, y = 2, z = 1$ b) $x = 2, y = 0, z = -1$ c) $x = 0, y = 1, z = 0$
7. Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para el valor o los valores que se indican:
   a) $x^2 + 2x - 7$ para $x = 2$ b) $(a + b)^2 - (a^2 + b^2)$ para $a = 3$ y $b = -2$ c) $c^2 + 3c + 7$ para $c = 1$.

2. POLINOMIOS. SUMA Y PRODUCTO

2.1. Monomios. Polinomios

Unas expresiones algebraicas de gran utilidad son los **polinomios**, cuya versión más simple y, a la vez, generadora de ellos son los **monomios**.

Un **monomio** viene dado por el producto de números e indeterminadas. Llamaremos **coeficiente** de un monomio al número que multiplica a la indeterminada, o indeterminadas; la indeterminada, o indeterminadas, conforman la **parte literal** del monomio.

Ejemplos:

- La expresión que nos proporciona el triple de una cantidad, $3 \cdot x$, es un monomio con una única variable, x, y coeficiente 3.
- El volumen de un cono, $\frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$, es un monomio con dos indeterminadas, r y h, y coeficiente $\frac{1}{3}\pi$. Su parte literal es $r^2 \cdot h$.
- Otros monomios: $5a^2b^3$, $\sqrt{2} \cdot x^3 \cdot y^2 \cdot z^2$
- La expresión $5xy^2 + \sqrt{3}xy - \frac{3}{7}x$ está formada por tres términos, tres monomios. Cada uno tiene un coeficiente y una parte literal:

  En el primero, $5xy^2$, el coeficiente es 5 y la parte literal xy^2

  El segundo, $\sqrt{3}xy$, tiene por coeficiente $\sqrt{3}$ y parte literal xy

  Y en el tercero, $-\frac{3}{7}x$, el coeficiente es $-\frac{3}{7}$ y la parte literal x

Atendiendo al exponente de la variable, o variables, adjudicaremos un **grado** a cada monomio con arreglo al siguiente criterio:

- Cuando haya una única indeterminada, el grado del monomio será el exponente de su indeterminada.

- Si aparecen varias indeterminadas, el grado del monomio será la suma de los exponentes de esas indeterminadas.

Ejemplos:

- $3x$ es un monomio de grado 1 en la variable x.
- $\frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$ es un monomio de grado 3 en las indeterminadas r y h.
- $5a^2b^3$ es un monomio de grado 5 en a y b.
- $\sqrt{2} \cdot x^3 \cdot y^2 \cdot z^2$ es un monomio de grado 7 en x, y y z.

Un número puede ser considerado como un monomio de grado 0.

Actividades propuestas

8. En cada uno de los siguientes monomios señala su coeficiente, su parte literal y su grado:

$-12x^3$ $\qquad a^4b^3c \qquad$ $4xy^2$

Un **polinomio** es una expresión construida a partir de la suma de monomios. El **grado de un polinomio** vendrá dado por el mayor grado de sus monomios.

Ejemplos:

- $\frac{1}{5}\cdot x^2 - 7\cdot x^3 + 2$ es un polinomio de grado 3 en la variable x.
- $-3\cdot y^4 + 8\cdot x^2 + 2\cdot x$ es un polinomio de grado 4 en las indeterminadas x e y.
- $4\cdot x^2\cdot y^3 - 7 + 3\cdot y^2$ es un polinomio de grado 5 en x e y.
- $x - 2\cdot y + 6\cdot z$ es un polinomio de grado 1 en x, y y z.

Tanto en esta sección como en la siguiente nos limitaremos, básicamente, a considerar polinomios con una única variable. Es habitual escribir los diferentes monomios de un polinomio de forma que sus grados vayan en descenso para, con este criterio, apreciar en su primer monomio cuál es el grado del polinomio.

El aspecto genérico de un polinomio en la variable x es

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

donde los coeficientes a_k son números. El monomio de grado cero, a_0, recibe el nombre de **término independiente**. Diremos que un polinomio es **mónico** cuando el coeficiente de su término de mayor grado es igual a 1.

Ejemplos:

- $-3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ es un polinomio de grado 4 en la variable x, cuyo término independiente es 2.
- $4y^3 + 3y - 7$ es un polinomio de grado 3 en la indeterminada y con término independiente -7.
- $z^2 - 3z + 12$ es un polinomio de grado 2 en z. Además, es un polinomio mónico.
- $3x + 9$ es un polinomio de grado 1 en x.

Actividades propuestas

9. Para cada uno de los siguientes polinomios destaca su grado y los monomios que lo constituyen:

$5x^4 + 7x^2 - x$ $\qquad 6x^2 + 10 - 2x^3 \qquad$ $2xy^3 - x^5 + 7x^2y^2$

Como ocurre con cualquier expresión algebraica, si fijamos, o escogemos, un valor concreto para la variable de un polinomio aparece un número: el **valor numérico** del polinomio para ese valor determinado de la variable. Si hemos llamado p a un polinomio, a la evaluación de p en, por ejemplo, el número -3 la denotaremos por $p(-3)$, y leeremos *"p de menos tres"* o *"p en menos tres"*. Con este criterio, si p es un polinomio cuya indeterminada es la variable x, podemos referirnos a él como p o $p(x)$ indistintamente.

De esta forma apreciamos que un polinomio puede ser entendido como una manera concreta de asignar a cada número otro número.

Ejemplos:

- Si evaluamos el polinomio $p \equiv -3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ en $x = 5$ nos encontramos con el número

$$p(5) = -3\cdot 5^4 + \frac{1}{5}\cdot 5^2 + 2 = -3\cdot 625 + 5 + 2 = -1875 + 7 = -1868$$

- El valor del polinomio $q(y) = 4y^3 + 3y - 7$ para $y = -1$ es

$$q(-1)=4\cdot(-1)^3+3\cdot(-1)-7=4\cdot(-1)-3-7=-4-10=-14$$

- Al particularizar el polinomio $r\equiv z^2-3z+12$ en $z=0$ resulta el número $r(0)=12$.

Actividades propuestas

10. Consideremos el polinomio $p(x)=x^3-3x+2$. Halla los siguientes valores numéricos de p: $p(0)$, $p(1)$, $p(-1)$, $p(-2)$ y $p(1/2)$.

2.2. Suma de polinomios

Como un polinomio es una suma de monomios, la suma de dos polinomios es otro polinomio. A la hora de sumar dos polinomios procederemos a sumar los monomios de igual parte literal.

Ejemplos:

- La suma de los polinomios $-3x^4+\frac{1}{5}x^2+2$ y $-x^4+4x^2-5x-6$ es el polinomio

$$\left(-3x^4+\frac{1}{5}x^2+2\right)+(-x^4+4x^2-5x-6)=(-3x^4-x^4)+\left(\frac{1}{5}x^2+4x^2\right)-5x+(2-6)=$$

$$=(-3-1)\cdot x^4+\left(\frac{1}{5}+4\right)\cdot x^2-5x+(2-6)=-4x^4+\frac{21}{5}x^2-5x-4$$

- $(5x^2-3x+1)+(x^2+4x-7)=(5x^2+x^2)+(-3x+4x)+(1-7)=6x^2+x-6$
- $(2x^3+1)+(-x^4+4x)=-x^4+2x^3+4x+1$
- $(x^3+9)+(-x^3+2)=11$
- $3xy + 5xy + 2x = 8xy + 2x$

En el siguiente ejemplo sumaremos dos polinomios disponiéndolos, adecuadamente, uno sobre otro.

Ejemplo:

$$\begin{array}{rrrrrrr} & 4x^5 & +2x^4 & +x^3 & -5x^2 & +x & +4 \\ + & -7x^5 & & +4x^3 & +5x^2 & -3x & -6 \\ \hline & -3x^5 & +2x^4 & +5x^3 & & -2x & -2 \end{array}$$

Propiedades de la suma de polinomios

Propiedad conmutativa. Si *p* y *q* son dos polinomios, no importa el orden en el que los coloquemos a la hora de sumarlos:

$$p+q\equiv q+p$$

Ejemplo:

$$(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-3x+1)=-x^3+(4x^2+x^2)+(-2x-3x)+(7+1)=-x^3+5x^2-5x+8$$

$$(-x^3+x^2-3x+1)+(4x^2-2x+7)=-x^3+(x^2+4x^2)+(-3x-2x)+(1+7)=-x^3+5x^2-5x+8$$

Propiedad asociativa. Nos señala cómo se pueden sumar tres o más polinomios. Basta hacerlo agrupándolos de dos en dos:

$$(p+q)+r\equiv p+(q+r)$$

Ejemplo:

$$(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-3x+1)+(x-6)=(4x^2-2x+7-x^3+x^2-3x+1)+(x-6)=$$

$$=(-x^3+5x^2-5x+8)+(x-6)=-x^3+5x^2-4x+2$$

También:

$$(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-3x+1)+(x-6)=(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-3x+1+x-6)=$$

$$=(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-2x-5)=-x^3+5x^2-4x+2$$

Actividades propuestas

11. Realiza las siguientes sumas de polinomios:
    - $(-x^3+x-5)+(2x^2+5x+4)+(-4x^3-2x^2+3x)$
    - $(x^2+4)+(-2x+4)+(-6x^3+3x^2+x+1)-x^2$

Elemento neutro. Hay un polinomio con una propiedad particular: el resultado de sumarlo con cualquier otro siempre es este último. Se trata del polinomio dado por el número 0, el *polinomio cero*.

Ejemplo:

$$0+(-7x^3+3x+7)=(-7x^3+3x+7)+0=-7x^3+3x+7$$

Elemento opuesto. Cada polinomio tiene asociado otro, al que llamaremos su *polinomio opuesto*, tal que la suma de ambos es igual al polinomio cero. Alcanzamos el polinomio opuesto de uno dado, simplemente, cambiando el signo de cada monomio.

Ejemplo:

- El polinomio opuesto de $p \equiv -2x^4 + x^3 + 2x - 7$ es $2x^4 - x^3 - 2x + 7$, al que denotaremos como "$-p$". Ratifiquemos que su suma es el polinomio cero:
$$(-2x^4 + x^3 + 2x - 7) + (2x^4 - x^3 - 2x + 7) = (-2x^4 + 2x^4) + (x^3 - x^3) + (2x - 2x) + (-7 + 7) = 0$$

Actividades propuestas

12. Escribe el polinomio opuesto de cada uno de los siguientes polinomios:
    a) $2x^3 - 2x^2 - 3x + 9$ b) $-5x$ c) $-x^3 + 7x$
13. Considera los polinomios $p \equiv x^2 - x + 1$, $q \equiv -x^3 + 2x - 3$, así como el polinomio suma $s \equiv p + q$. Halla los valores que adopta cada uno de ellos para $x = -2$, es decir, calcula $p(-2)$, $q(-2)$ y $s(-2)$. Estudia si existe alguna relación entre esos tres valores.
14. Obtén el valor del polinomio $p \equiv 4x^3 - x^2 + 1$ en $x = 2$. ¿Qué valor toma el polinomio opuesto de p en $x = 2$?

2.3. Producto de polinomios

Otra operación que podemos realizar con polinomios es la multiplicación.

El resultado del producto de polinomios siempre será otro polinomio. Aunque en un polinomio tenemos una indeterminada, o variable, como ella adopta valores numéricos, a la hora de multiplicar polinomios utilizaremos las propiedades de la suma y el producto entre números, en particular la propiedad distributiva del producto respecto de la suma; así, todo queda en función del producto de monomios, cuestión que resolvemos con facilidad:

$$ax^n \cdot bx^m = abx^{n+m}$$

Ejemplos:

- $(-5)x^2 \cdot 2x^4 = (-5) \cdot 2 \cdot x^{2+4} = -10x^6$
- $5x^3 \cdot (-4) = 5 \cdot (-4) \cdot x^3 = -20x^3$
- $3x^2 \cdot (2x^2 - 4x + 6) = (3x^2 \cdot 2x^2) - (3x^2 \cdot 4x) + (3x^2 \cdot 6) = 6x^4 - 12x^3 + 18x^2$
- $(-x^3 + 3x - 1) \cdot (-2x) = (-x^3) \cdot (-2x) + (3x) \cdot (-2x) + (-1) \cdot (-2x) = 2x^4 - 6x^2 + 2x$
- $(3x - 2) \cdot (x^2 - 4x - 5) = (3x) \cdot (x^2 - 4x - 5) + (-2) \cdot (x^2 - 4x - 5) = (3x^3 - 12x^2 - 15x) + (-2x^2 + 8x + 10) =$
  $= 3x^3 + (-12x^2 - 2x^2) + (-15x + 8x) + 10 = 3x^3 - 14x^2 - 7x + 10$
- $(x - 6) \cdot (x^3 - 2x) = (x - 6) \cdot x^3 + (x - 6) \cdot (-2x) = (x^4 - 6x^3) + (-2x^2 + 12x) = x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 12x$

También podemos materializar el producto de polinomios tal y como multiplicamos números enteros:

Ejemplo:

$$\begin{array}{rrrrrrr}
 & & -2x^3 & & & +x & +4 \\
\times & & & & x^2 & -3x & +1 \\
\hline
 & & -2x^3 & & & +x & +4 \\
 & 6x^4 & & & -3x^2 & -12x & \\
-2x^5 & & +x^3 & & +4x^2 & & \\
\hline
-2x^5 & +6x^4 & -x^3 & & +x^2 & -11x & +4
\end{array}$$

Recordemos que el polinomio *opuesto* de otro se obtiene simplemente cambiando el signo de cada monomio. Esta acción se corresponde con multiplicar por el número "-1" el polinomio original. De esta forma el polinomio opuesto de p es

$$-p \equiv (-1) \cdot p$$

En este momento aparece de manera natural la **operación diferencia**, o **resta**, de polinomios. La definimos con la ayuda del polinomio opuesto de uno dado:

$$p - q \equiv p + (-q) \equiv p + (-1) \cdot q$$

Ejemplo:

$$(-5x^2 - 3x + 2) - (-2x^4 + x^3 + 3x^2 + 6) = (-5x^2 - 3x + 2) + (2x^4 - x^3 - 3x^2 - 6) =$$
$$= 2x^4 - x^3 + (-5x^2 - 3x^2) - 3x + (2 - 6) = 2x^4 - x^3 - 8x^2 - 3x - 4$$

Actividades propuestas

15. Efectúa los siguientes productos de polinomios:
    $(-2x) \cdot (3x^2 - 4)$ $(2x^3 + 1) \cdot (-4x + 5)$

$(4x^3 - x^2 - 1)\cdot(2x+6)$ $\qquad$ $(-1)\cdot(8x^2+7x-9)$

16. Realiza las siguientes diferencias de polinomios:

$(5x^2+2)-(-2x)$ $\qquad$ $(-2x^3+4x)-(-2x-1)$ $\qquad$ $(7x^2-2x)-(3x^3+4x^2-x+1)$

17. Multiplica cada uno de los siguientes polinomios por un número de tal forma que surjan polinomios mónicos:

$3x^2-x+2$ $\qquad$ $-6x^3+2x-3$ $\qquad$ $-x^2+9x-2$

18. Calcula y simplifica los siguientes productos:

a) $x\cdot(-2x+4)$ $\qquad$ b) $(2x-3)\cdot(3x+2)$ $\qquad$ c) $(a-2)\cdot(4-3a)$ $\qquad$ d) $(3a-b^2)\cdot(2b-a^2)$

Propiedades del producto de polinomios

Propiedad conmutativa. Si *p* y *q* son dos polinomios, no importa el orden en el que los coloquemos a la hora de multiplicarlos: $p\cdot q \equiv q\cdot p$

Ejemplo:

$$(2x-7)\cdot(-x^3+x^2) = 2x\cdot(-x^3+x^2) - 7\cdot(-x^3+x^2) = -2x^4+2x^3+7x^3-7x^2 = -2x^4+9x^3-7x^2$$

$$(-x^3+x^2)\cdot(2x-7) = -x^3\cdot(2x-7)+x^2\cdot(2x-7) = -2x^4+7x^3+2x^3-7x^2 = -2x^4+9x^3-7x^2$$

Propiedad asociativa. Nos señala cómo se pueden multiplicar tres o más polinomios. Basta hacerlo agrupándolos de dos en dos: $(p\cdot q)\cdot r \equiv p\cdot(q\cdot r)$

Ejemplo:

$$\left((4x^2-2)\cdot(-3x+1)\right)\cdot(-x^3+x) = (-12x^3+4x^2+6x-2)\cdot(-x^3+x) =$$

$$= 12x^6-12x^4-4x^5+4x^3-6x^4+6x^2+2x^3-2x = 12x^6-4x^5-18x^4+6x^3+6x^2-2x$$

También:

$$(4x^2-2)\cdot\left((-3x+1)\cdot(-x^3+x)\right) = (4x^2-2)\cdot(3x^4-3x^2-x^3+x) =$$

$$= 12x^6-12x^4-4x^5+4x^3-6x^4+6x^2+2x^3-2x = 12x^6-4x^5-18x^4+6x^3+6x^2-2x$$

Actividades propuestas

19. Realiza los siguientes productos de polinomios:

$x\cdot(-3x^2+4x+2)\cdot x^2$ $\qquad$ $(-2x+1)\cdot(5x^2-x+3)\cdot(-x)$ $\qquad$ $(3a-1)\cdot(2-a)\cdot(5-4a)$

Elemento neutro. Hay un polinomio con una propiedad particular: al multiplicarlo por cualquier otro siempre nos da éste último. Se trata del polinomio dado por el número 1, el *polinomio unidad*.

Ejemplo: $\quad 1\cdot(-5x^3-2x+3) = (-5x^3-2x+3)\cdot 1 = -5x^3-2x+3$

Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma. Cuando en una multiplicación de polinomios uno de los factores viene dado como la suma de dos polinomios como, por ejemplo,

$$(3x^2-x)\cdot\left((-2x+7)+(x^3-4x)\right)$$

tenemos dos opciones para conocer el resultado:

a) realizar la suma y, después, multiplicar

$$(3x^2-x)\cdot\left((-2x+7)+(x^3-4x)\right) = (3x^2-x)\cdot\left(x^3-6x+7\right) =$$

$$= 3x^5-18x^3+21x^2-x^4+6x^2-7x = 3x^5-x^4-18x^3+27x^2-7x$$

b) distribuir, aplicar, la multiplicación a cada uno de los sumandos y, después, sumar:

$$(3x^2-x)\cdot\left((-2x+7)+(x^3-4x)\right) = (3x^2-x)\cdot(-2x+7)+(3x^2-x)\cdot(x^3-4x) =$$

$$= (-6x^3+21x^2+2x^2-7x)+(3x^5-12x^3-x^4+4x^2) = 3x^5-x^4-18x^3+27x^2-7x$$

Comprobamos que obtenemos el mismo resultado.

En general, la **propiedad distributiva** de la multiplicación respecto de la suma nos dice que

$$p\cdot(q+r) \equiv (p\cdot q)+(p\cdot r)$$

Conviene comentar que la anterior propiedad distributiva leída en sentido contrario, de derecha a izquierda, es lo que comúnmente se denomina **sacar factor común**.

Ejemplo:

$$6x^5-4x^4-18x^3+2x^2 = (3x^3-2x^2-9x+1)\cdot 2x^2$$

Actividades propuestas

De cada uno de los siguientes polinomios extrae algún factor que sea común a sus monomios:

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

- $-10x^3-15x^2+20x$
- $30x^4+24x^2$

3. DIVISIÓN DE POLINOMIOS

3.1. Introducción a las fracciones polinómicas

Hasta este momento hemos estudiado varias operaciones con polinomios: suma, resta y producto. En cualquiera de los casos el resultado siempre es otro polinomio. Cuando establecemos una **fracción polinómica** como, por ejemplo,

$$\frac{3x^3-x}{2x^2+x-3}$$

lo que tenemos es una expresión algebraica, una **fracción algebraica**, la cual, en general, no es un polinomio. Sí aparece un polinomio en el muy particular caso en el que el denominador es un número diferente de cero, esto es, un polinomio de grado 0.

Es sencillo constatar que la expresión anterior no es un polinomio: cualquier polinomio puede ser evaluado en cualquier número. Sin embargo esa expresión no puede ser evaluada para $x=1$, ya que nos quedaría el número 0 en el denominador.

Podríamos creer que la siguiente fracción polinómica sí es un polinomio:

$$\frac{-2x^3+5x^2-3x}{x}=\frac{-2x^3}{x}+\frac{5x^2}{x}+\frac{-3x}{x}=-2x^2+5x-3$$

La expresión de la derecha sí es un polinomio, pues se trata de una suma de monomios, pero la de la izquierda no lo es ya que no puede ser evaluada en $x=0$. No obstante, esa fracción algebraica y el polinomio, cuando son evaluados en cualquier número diferente de cero, ofrecen el mismo valor. Son **expresiones equivalentes** allí donde ambas tienen sentido, esto es, para aquellos números en los que el denominador no se hace cero.

3.2. División de polinomios

Aunque, como hemos visto en el apartado anterior, una fracción polinómica, en general, no es un polinomio, vamos a adentrarnos en la división de polinomios pues es una cuestión importante y útil.

Analicemos con detenimiento la división de dos números enteros positivos. Cuando dividimos dos números, *D* (dividendo) entre *d* (divisor, distinto de 0), surgen otros dos, el cociente (*c*) y el resto (*r*). Ellos se encuentran ligados por la llamada *prueba de la división*:

$$D=d\cdot c+r$$

Alternativamente:

$$\frac{D}{d}=c+\frac{r}{d}$$

Además, decimos que la división es exacta cuando $r=0$.

El conocido algoritmo de la división persigue encontrar un número entero, el cociente *c*, tal que el resto *r* sea un número menor que el divisor *d*, y mayor o igual que cero. Fijémonos en que, sin esta exigencia para el resto *r*, podemos escoger arbitrariamente un valor para el cociente *c* el cual nos suministra su valor asociado como resto *r*. En efecto, si tenemos como dividendo *D* = 673 y como divisor *d* = 12, "si queremos" que el cociente sea *c* = 48 su resto asociado es

$$r=D-d\cdot c=673-12\cdot 48=673-576=97$$

y la conexión entre estos cuatro números es

$$673=12\cdot 48+97$$

Esta última "lectura" de la división de números enteros va a guiarnos a la hora de dividir dos polinomios.

Dados dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$, la división de $p(x)$, polinomio dividendo, entre $q(x)$, polinomio divisor, nos proporcionará otros dos polinomios, el polinomio cociente $c(x)$ y el polinomio resto $r(x)$. También aquí pesará una exigencia sobre el polinomio resto: su grado deberá ser menor que el grado del polinomio divisor. La relación entre los cuatro será, naturalmente,

$$p(x)=q(x)\cdot c(x)+r(x)$$

También escribiremos

$$\frac{p(x)}{q(x)}=c(x)+\frac{r(x)}{q(x)}$$

aunque, en tal caso, seremos conscientes de las cautelas señaladas en el apartado anterior en cuanto a las equivalencias entre polinomios y otras expresiones algebraicas.

Al igual que ocurre con el algoritmo de la división entera, el algoritmo de la división de polinomios consta de varias etapas, de carácter repetitivo, en cada una de las cuales aparecen unos polinomios cociente y resto "provisionales" de forma que el grado de esos polinomios resto va descendiendo hasta que nos topamos con uno cuyo grado es inferior al grado del polinomio divisor, lo que indica que hemos concluido. Veamos este procedimiento con un ejemplo concreto.

Ejemplo:

- Vamos a dividir el polinomio $p(x)=6x^4+5x^3+x^2+3x-2$ entre el polinomio $q(x)=2x^2-x+3$. Como el polinomio divisor, $q(x)$, es de grado 2, debemos encontrar dos polinomios, un polinomio cociente $c(x)$, y un polinomio resto $r(x)$ de grado 1 o 0, tales que

$$p(x)=q(x)\cdot c(x)+r(x)$$

o, como igualdad entre expresiones algebraicas,

$$\frac{p(x)}{q(x)}=c(x)+\frac{r(x)}{q(x)}$$

A la vista de los polinomios $p(x)$ y $q(x)$, y de lo dicho sobre $r(x)$, es evidente que el grado del polinomio cociente, $c(x)$, ha de ser igual a 2. Vamos a obtenerlo monomio a monomio.

- Primera aproximación a los polinomios cociente y resto:

Para poder lograr la igualdad $p\equiv q\cdot c+r$, como el grado de $r(x)$ será 1 o 0, el término de mayor grado de $p(x)$, $6x^4$, surgirá del producto $q(x)\cdot c(x)$. Así obtenemos la primera aproximación de $c(x)$, su monomio de mayor grado:

$$c_1(x)=3x^2$$

y, de manera automática, también un primer resto $r_1(x)$:

$$r_1(x)=p(x)-q(x)\cdot c_1(x)=(6x^4+5x^3+x^2+3x-2)-(2x^2-x+3)\cdot 3x^2=$$
$$=(6x^4+5x^3+x^2+3x-2)-(6x^4-3x^3+9x^2)=8x^3-8x^2+3x-2$$

Como este polinomio $r_1(x)$ es de grado 3, mayor que 2, el grado del polinomio divisor $q(x)$, ese polinomio resto no es el definitivo; debemos continuar.

- Segunda aproximación a los polinomios cociente y resto:

Si particularizamos la igualdad entre expresiones algebraicas $\frac{p(x)}{q(x)}=c(x)+\frac{r(x)}{q(x)}$ a lo que tenemos hasta ahora resulta

$$\frac{6x^4+5x^3+x^2+3x-2}{2x^2-x+3}=3x^2+\frac{8x^3-8x^2+3x-2}{2x^2-x+3}$$

Esta segunda etapa consiste en dividir el polinomio $r_1(x)=8x^3-8x^2+3x-2$, surgido como resto de la etapa anterior, entre el polinomio $q(x)=2x^2-x+3$, el divisor inicial. Es decir, repetimos lo hecho antes pero considerando un nuevo polinomio dividendo: el polinomio resto del paso anterior.

El nuevo objetivo es alcanzar la igualdad $r_1\equiv q\cdot c_2+r$. Al igual que antes, el grado de $r(x)$ debería ser 1 o 0. Como el término de mayor grado de $r_1(x)$, $8x^3$, sale del producto $q(x)\cdot c_2(x)$, es necesario que el polinomio cociente contenga el monomio

$$c_2(x)=4x$$

Ello nos lleva a un segundo resto $r_2(x)$:

$$r_2(x)=r_1(x)-q(x)\cdot c_2(x)=(8x^3-8x^2+3x-2)-(2x^2-x+3)\cdot 4x=$$
$$=(8x^3-8x^2+3x-2)-(8x^3-4x^2+12x)=-4x^2-9x-2$$

Como este polinomio $r_2(x)$ es de grado 2, igual que el grado del polinomio divisor $q(x)$, ese polinomio resto no es el definitivo; debemos continuar.

- Tercera aproximación a los polinomios cociente y resto:

Lo realizado en la etapa segunda nos permite avanzar en la adecuada descomposición de la expresión algebraica que nos ocupa:

$$\frac{6x^4+5x^3+x^2+3x-2}{2x^2-x+3}=3x^2+\frac{8x^3-8x^2+3x-2}{2x^2-x+3}=3x^2+4x+\frac{-4x^2-9x-2}{2x^2-x+3}$$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Esta tercera etapa consiste en dividir el polinomio $r_2(x) = -4x^2 - 9x - 2$, el resto de la etapa anterior, entre el polinomio $q(x) = 2x^2 - x + 3$, el divisor inicial. De nuevo repetimos el algoritmo pero con otro polinomio dividendo: el polinomio resto del paso anterior.

Perseguimos que $r_2 \equiv q \cdot c_3 + r$. Como en cada paso, el grado de $r(x)$ debería ser 1 o 0. El término de mayor grado de $r_2(x)$, $-4x^2$, surge del producto $q(x) \cdot c_3(x)$, por lo que

$$c_3(x) = -2$$

y el tercer resto $r_3(x)$ es

$$r_3(x) = r_2(x) - q(x) \cdot c_3(x) = (-4x^2 - 9x - 2) - (2x^2 - x + 3) \cdot (-2) =$$
$$= (-4x^2 - 9x - 2) - (-4x^2 + 2x - 6) = -11x + 4$$

Como este polinomio $r_3(x)$ es de grado 1, menor que 2, grado del polinomio divisor $q(x)$, ese polinomio resto sí es el definitivo. Hemos concluido:

$$\frac{6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2}{2x^2 - x + 3} = 3x^2 + \frac{8x^3 - 8x^2 + 3x - 2}{2x^2 - x + 3} = 3x^2 + 4x + \frac{-4x^2 - 9x - 2}{2x^2 - x + 3} = 3x^2 + 4x - 2 + \frac{-11x + 4}{2x^2 - x + 3}$$

Si lo expresamos mediante polinomios:

$$6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2 = (2x^2 - x + 3) \cdot (3x^2 + 4x - 2) + (-11x + 4)$$

Conclusión: al dividir el polinomio $p(x) = 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2$ entre el polinomio $q(x) = 2x^2 - x + 3$ obtenemos como polinomio cociente $c(x) = 3x^2 + 4x - 2$ y como polinomio resto $r(x) = -11x + 4$.

Seguidamente vamos a agilizar la división de polinomios:

Actividades propuestas

20. Comprueba que los cálculos que tienes a continuación reflejan lo que se hizo en el ejemplo anterior para dividir el polinomio $p(x) = 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2$ entre el polinomio $q(x) = 2x^2 - x + 3$.

- Primera etapa:

$$\begin{array}{rl}
6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2 & \underline{|\ \ 2x^2 - x + 3} \\
\underline{-6x^4 + 3x^3 - 9x^2} \qquad\qquad & 3x^2 \\
8x^3 - 8x^2 + 3x - 2 &
\end{array}$$

- Primera y segunda etapas:

$$\begin{array}{rl}
6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2 & \underline{|\ \ 2x^2 - x + 3} \\
\underline{-6x^4 + 3x^3 - 9x^2} \qquad\qquad & 3x^2 + 4x \\
8x^3 - 8x^2 + 3x - 2 & \\
\underline{-8x^3 + 4x^2 - 12x} \qquad & \\
-4x^2 - 9x - 2 &
\end{array}$$

- Las tres etapas:

$$\begin{array}{rl}
6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2 & \underline{|\ \ 2x^2 - x + 3} \\
\underline{-6x^4 + 3x^3 - 9x^2} \qquad\qquad & 3x^2 + 4x - 2 \\
8x^3 - 8x^2 + 3x - 2 & \\
\underline{-8x^3 + 4x^2 - 12x} \qquad & \\
-4x^2 - 9x - 2 & \\
\underline{4x^2 - 2x + 6} & \\
-11x + 4 &
\end{array}$$

21. Divide los siguientes polinomios:

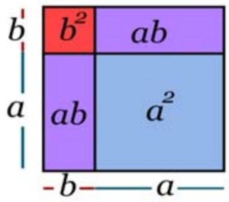
- $3x^3 + 4x^2 - 9x + 7$ entre $x^2 + 2x - 1$
- $-6x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ entre $3x^3 + x^2 - 2x + 1$
- $-6x^4 - 13x^3 - 4x^2 - 13x + 7$ entre $-3x^2 - 2x + 1$
- $3x^5 - 9x^4 + 7x^3 + 4x^2 - 14x + 14$ entre $x^3 - 2x^2 - x + 3$
- $x^5 - 4x - 6$ entre $x^2 + 3$

22. Encuentra dos polinomios tales que al dividirlos aparezca $q(x) = x^2 - 2x - 1$ como polinomio cociente y $r(x) = 2x^2 - 3$ como resto.

3.3. Productos notables de polinomios

En este apartado vamos a destacar una serie de productos concretos de polinomios que surgen frecuentemente. Podemos exponerlos de muy diversas formas. Tal y como lo haremos, aparecerá más de una indeterminada; hemos de ser capaces de apreciar que si, en algún caso particular, alguna indeterminada pasa a ser un número concreto esto no hará nada más que particularizar una situación más general.

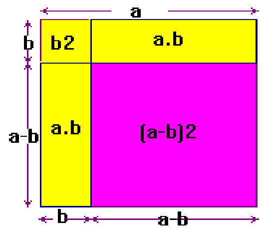
Potencias de un binomio. Las siguientes igualdades se obtienen, simplemente, tras efectuar los oportunos cálculos:



$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

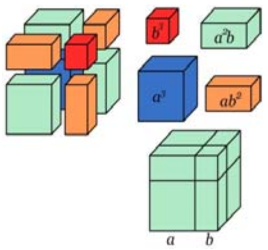
El cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primero, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

Comprueba la igualdad a partir de los cuadrados y rectángulos de la ilustración.



$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

El cuadrado de una diferencia es igual al cuadrado del primero, menos el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.



Observa la figura y conéctala con la igualdad.

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Ratifica la igualdad con los cubos y prismas de la figura.

- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Podemos observar que, en cada uno de los desarrollos, el exponente del binomio coincide con el grado de cada uno de los monomios.

Ejemplos:

- $(a+3)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot 3 + 3^2 = a^2 + 6a + 9$
- $(x-4)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 = x^2 - 8x + 16$
- $(3x+5)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 5 + (5)^2 = 9x^2 + 30x + 25$
- $(x-6y)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 6y + (6y)^2 = x^2 - 12xy + 36y^2$
- $(2x-5)^3 = (2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 \cdot 5 + 3 \cdot (2x) \cdot 5^2 - 5^3 = 8x^3 - 30x^2 + 150x - 125$

Actividades propuestas

23. Realiza los cálculos:

$(1+x)^2$ $\quad$ $(-x+2)^2$ $\quad$ $(x-2)^2$ $\quad$ $(2a-3)^2$ $\quad$ $(x^2+1)^3$ $\quad$ $(2b-4)^3$

24. Obtén las fórmulas de los cuadrados de los siguientes trinomios:

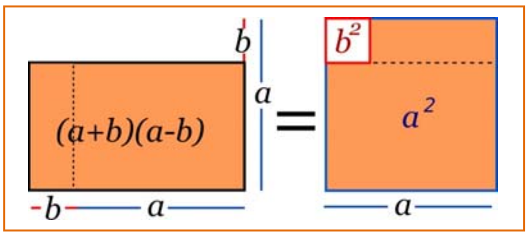
$(a+b+c)^2$ $\qquad$ $(a-b+c)^2$

25. Desarrolla las siguientes potencias:

a) $(3x - y)^2$ $\quad$ b) $(2a + x/2)^2$ $\quad$ c) $(4y - 2/y)^2$
d) $(5a + a^2)^2$ $\quad$ e) $(- a^2 + 2b^2)^2$ $\quad$ f) $(2/3y - 1/y)^2$

26. Expresa como cuadrado de una suma o de una diferencia las siguientes expresiones algebraicas:

a) $a^2 - 6a + 9$ $\quad$ b) $4x^2 + 4x + 1$ $\quad$ c) $b^2 - 10b + 25$
d) $4y^2 - 12y + 9$ $\quad$ e) $a^4 + 2a^2 + 1$ $\quad$ f) $y^4 + 6xy^2 + 9x^2$



Suma por diferencia. De nuevo la siguiente igualdad se obtiene tras efectuar el producto señalado:

$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$$

Suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados.

Observa las figuras y conéctalas con la igualdad.

Ejemplos:

- $(a+7) \cdot (a-7) = a^2 - 7^2 = a^2 - 49$
- $(x+1) \cdot (x-1) = x^2 - 1^2 = x^2 - 1$

- $(2x+3)\cdot(2x-3)=(2x)^2-3^2=4x^2-9$
- $(-3x-5)\cdot(-3x+5)=(-1)\cdot(3x+5)\cdot(-3x+5)=(-1)\cdot(5+3x)\cdot(5-3x)=$
  $=(-1)\cdot(5^2-(3x)^2)=-25+9x^2$

Actividades propuestas

27. Efectúa estos productos:
    - $(3x+2)\cdot(3x-2)$ $\quad (2x+4y)\cdot(2x-4y)$ $\quad (4x^2+3)\cdot(4x^2-3)$
    - $(3a-5b)\cdot(3a+5b)$ $\quad (-x^2+5x)\cdot(x^2+5x)$
28. Expresa como suma por diferencia las siguientes expresiones
    a) $9x^2-25$ b) $4a^4-81b^2$ c) $49-25x^2$ d) $100a^2-64$

De vuelta a los polinomios de una variable, podemos decir que en este apartado hemos expandido *potencias de un polinomio*, o productos de un polinomio por sí mismo, así como productos de la forma *suma por diferencia*. Conviene darse cuenta de que sus fórmulas, leídas al revés, nos informan del resultado de ciertas divisiones de polinomios. En efecto, al igual que cuando leemos $17\times 11=187$ deducimos que $\frac{187}{17}=11$ y, también, $\frac{187}{11}=17$, a partir del desarrollo de un binomio como, por ejemplo, $(-3x^2+2x)^2=(-3x^2+2x)\cdot(-3x^2+2x)=9x^4-12x^3+4x^2$, podemos obtener que

$$\frac{9x^4-12x^3+4x^2}{-3x^2+2x}=-3x^2+2x$$

Lo mismo ocurre con el producto de polinomios de la forma *suma por diferencia*. Puesto que, por ejemplo, $(2x^3-5)\cdot(2x^3+5)=4x^6-25$, deducimos que $\frac{4x^6-25}{2x^3-5}=2x^3+5$, y también $\frac{4x^6-25}{2x^3+5}=2x^3-5$.

Actividades propuestas

29. Realiza las siguientes divisiones de polinomios a partir de la conversión del dividendo en la potencia de un binomio o en un producto de la forma suma por diferencia:
    - $x^2+12x+36$ entre $x+6$ $\quad 4x^4-16x^2$ entre $2x^2-4x$
    - $9x^2-24x+16$ entre $3x-4$ $\quad x^2-5$ entre $x+\sqrt{5}$

3.4. Operaciones con fracciones algebraicas

Puesto que tanto los polinomios como las fracciones algebraicas obtenidas a partir de dos polinomios son, en potencia, números, operaremos con tales expresiones siguiendo las propiedades de los números.

- Suma o resta. Para sumar o restar dos fracciones polinómicas deberemos conseguir que tengan igual denominador. Una manera segura de lograrlo, aunque puede no ser la más adecuada, es ésta:
$$\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}\equiv\frac{p_1\cdot q_2}{q_1\cdot q_2}+\frac{p_2\cdot q_1}{q_2\cdot q_1}\equiv\frac{p_1\cdot q_2+p_2\cdot q_1}{q_1\cdot q_2}$$
- Producto. Basta multiplicar los numeradores y denominadores entre sí:
$$\frac{p_1}{q_1}\cdot\frac{p_2}{q_2}\equiv\frac{p_1\cdot p_2}{q_1\cdot q_2}$$
- División. Sigue la conocida regla de la división de fracciones numéricas:
$$\frac{\frac{p_1}{q_1}}{\frac{p_2}{q_2}}\equiv\frac{p_1\cdot q_2}{q_1\cdot p_2}$$

Ejemplos:

- $\frac{x-1}{x}+\frac{3x+1}{x+1}=\frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x\cdot(x+1)}+\frac{(3x+1)\cdot x}{(x+1)\cdot x}=\frac{x^2-1}{x^2+x}+\frac{3x^2+x}{x^2+x}==\frac{(x^2-1)+(3x^2+x)}{x^2+x}=\frac{4x^2+x-1}{x^2+x}$
- $\frac{x+2}{x+1}-\frac{7}{x+2}=\frac{(x+2)\cdot(x+2)}{(x+1)\cdot(x+2)}-\frac{7\cdot(x+1)}{(x+2)\cdot(x+1)}=\frac{x^2+4x+4}{(x+1)\cdot(x+2)}\frac{7x+7}{(x+2)\cdot(x+1)}==\frac{(x^2+4x+4)-(7x+7)}{(x+1)\cdot(x+2)}=\frac{x^2-3x-3}{(x+1)\cdot(x+2)}$
- $\frac{x+1}{x-5}\cdot\frac{3x-1}{x^2-1}=\frac{(x+1)\cdot(3x-1)}{(x-5)\cdot(x^2-1)}$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

- $\frac{-3x+2}{x+3}:\frac{x^2+x}{x-1}=\frac{-3x+2}{x+3}\cdot\frac{x-1}{x^2+x}=\frac{(-3x+2)\cdot(x-1)}{(x+3)\cdot(x^2+x)}$

En ocasiones puede ser útil apreciar que una fracción polinómica puede ser reescrita como la suma, diferencia, producto o cociente de otras dos fracciones polinómicas. En particular, ello puede ser aprovechado para **simplificar** una expresión polinómica:

Ejemplos:

- $\frac{4x^2-3x}{8x-6}=\frac{x\cdot(4x-3)}{2\cdot(4x-3)}=\frac{x}{2}\cdot\frac{(4x-3)}{(4x-3)}=\frac{x}{2}\cdot 1=\frac{x}{2}$
- $\frac{x^2-6x+9}{9-x^2}=\frac{(x-3)^2}{(3+x)\cdot(3-x)}=\frac{(x-3)}{(3+x)}\cdot\frac{(x-3)}{(3-x)}=\frac{(x-3)}{(3+x)}\cdot(-1)=\frac{-x+3}{3+x}$

Actividades propuestas

30. Efectúa los siguientes cálculos:

$\frac{1}{x+2}+\frac{2}{x-1}$ $\qquad$ $\frac{x-2}{x^2-1}-\frac{5}{x}$ $\qquad$ $\frac{-x+1}{x+3}\cdot\frac{3x^2}{x+1}$ $\qquad$ $\frac{2+x}{x^2}:\frac{x}{x-3}$

31. Realiza las siguientes operaciones alterando, en cada apartado, solo uno de los denominadores, y su respectivo numerador:

$\frac{-2x^2-x+1}{x^3}+\frac{3x+1}{x^2}$ $\qquad$ $\frac{2x-1}{x^2-2x}-\frac{3x}{x-2}$

32. Calcula los siguientes cocientes:

a) $(2x^3 - 8x^2 + 6x) : 2x$ b) $(5a^3 + 60a^2 - 20) : 5$ c) $(16x^3 + 40x^2) : 8x^2$ d) $(6x^2y^3 - 4xy^2) : xy^2$

33. Comprueba las siguientes identidades simplificando la expresión del lado izquierdo de cada igualdad:

- $\frac{6a^8b^2}{2a^3b}=3a^5b$ $\qquad$ $\frac{8x^3y-2xy^2}{4xy}=2x^2-\frac{1}{2}y$
- $\frac{4x^2+2x}{2x-8}=\frac{2x^2+x}{x-4}$ $\qquad$ $\frac{6a^2b^2-4a^2b^3+4ab}{2ab^2-8a^2b}=\frac{3ab-2ab^2+2}{b-4a}$

34. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{3x^2+6x}{9x^2+18}$ b) $\frac{a^3-7a^2}{3a^3+5a^2}$ c) $\frac{x^2y^2-7xy^2}{2xy}$ d) $\frac{a^2b^2-ab}{a^3b+ab}$

35. En cada una de las siguientes fracciones algebraicas escribe, cuando sea posible, el polinomio numerador, o denominador, en forma de potencia de un binomio o de suma por diferencia para, posteriormente, poder simplificar cada expresión:

a) $\frac{x^2-4}{3x+6}$ b) $\frac{2x^2-16x+32}{x^2-16}$ c) $\frac{6-4a}{4a^2-9}$

RESUMEN

Noción	*Descripción*	*Ejemplos*
Expresión algebraica	Se construye con números y las operaciones matemáticas básicas de suma, resta, multiplicación y/o división	$\frac{-3x}{2x+y^3}-x\cdot y^2\cdot z$
Variable, indeterminada	Lo no concretado en una expresión algebraica	Las variables, o indeterminadas, del ejemplo anterior son *x*, *y*, *z*
Valor numérico de una expresión algebraica	Al fijar un valor concreto para cada indeterminada, o variable, de una expresión algebraica se obtiene un número, el **valor numérico** de esa expresión algebraica para tales valores de las indeterminadas.	Si, hacemos $x = 3$, $y = -2$, $z = 1/2$ obtenemos $\frac{-3\cdot 3}{2\cdot 3+(-2)^3}-3\cdot(-2)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{-3}{2}$
Monomio	Expresión dada por el producto de números e indeterminadas.	$-5\cdot x\cdot y^3\cdot z^2$, $7\cdot x^2$
Coeficiente de un monomio	El número que multiplica a la indeterminada, o indeterminadas, del monomio	Los coeficientes de los anteriores monomios son, respectivamente, –5 y 7

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Parte literal de un monomio	La indeterminada, o producto de indeterminadas, que multiplica al coeficiente del monomio	La parte literal de $-5\cdot x\cdot y^3\cdot z^2$ es $x\cdot y^3\cdot z^2$
Grado de un monomio	Cuando hay una única indeterminada es el exponente de dicha indeterminada. Si aparecen varias, el grado del monomio será la suma de los exponentes de esas indeterminadas.	Los grados de los monomios precedentes son 6 y 2, respectivamente
Polinomio	Expresión construida a partir de la suma de monomios.	$-x^3+4x^2+8x+6$
Grado de un polinomio	El mayor grado de sus monomios	El anterior polinomio es de grado 3
Suma, resta y producto de polinomios	El resultado siempre es otro polinomio	$p\equiv x+3,\ q\equiv x^2-2$ $p+q\equiv x^2+x+1$ $p-q\equiv -x^2+x+5$ $p\cdot q\equiv x^3+3x^2-2x-6$
División de dos polinomios	Se obtienen otros dos polinomios, los polinomios cociente ($c(x)$) y resto ($r(x)$), ligados a los polinomios iniciales: los polinomios dividendo ($p(x)$) y divisor ($q(x)$)	$p(x)=q(x)\cdot c(x)+r(x)$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Una empresa mayorista de viajes está confeccionando una oferta para distribuirla en diferentes agencias de viaje. Se trata de un viaje en avión, de ida y vuelta, a Palma de Mallorca cuyo precio dependerá del número final de viajeros. Los datos concretos son:

A) Si no hay más de 100 personas interesadas, el vuelo costará 150 euros por persona.

B) Si hay más de 100 personas interesadas, por cada viajero que pase del centenar el precio del viaje se reducirá en 1 euro. No obstante, el precio del vuelo en ningún caso será inferior a 90 euros.

2. Estudia y determina el precio final del vuelo, por persona, en función del número total de viajeros. Asimismo, expresa la cantidad que ingresará la empresa según el número de viajeros.
3. En este ejercicio se va a presentar un *truco* mediante el cual vamos a adivinar el número que resulta tras manipular repetidamente un número desconocido. Convierte en una expresión algebraica las sucesivas alteraciones del número desconocido y justifica lo que ocurre.
   i. Dile a un compañero que escriba en un papel un número par y que no lo muestre
   ii. Que lo multiplique por 5
   iii. Que al resultado anterior le sume 5
   iv. Que multiplique por 2 lo obtenido
   v. Que al resultado anterior le sume 10
   vi. Que multiplique por 5 lo obtenido
   vii. Que divida entre 100 la última cantidad
   viii. Que al resultado precedente le reste la mitad del número que escribió
   ix. Independientemente del número desconocido original ¿qué número ha surgido?
4. Los responsables de una empresa, en previsión de unos futuros altibajos en las ventas de los productos que fabrican, piensan proponer a sus trabajadores a finales del año 2014 lo siguiente:
5. La disminución de los sueldos, para el próximo año 2015, en un 10%.
   a) Para 2016 ofrecen aumentar un 10% los salarios de 2015.
   a) En general, sugieren que el sueldo disminuya un 10% cada año impar y que aumente un 10% cada año par.
6. Si finalmente se aplica lo expuesto, estudia si los trabajadores recuperarán en el año 2016 el salario que tenían en 2014. Analiza qué ocurre con los sueldos tras el paso de muchos años.
7. Los responsables de la anterior empresa, después de recibir el informe de una consultora, alteran su intención inicial y van a proponer a sus trabajadores, a finales del año 2014, lo siguiente:

a) Un aumento de los sueldos, para el próximo año 2015, de un 10%.

b) Para 2016, una reducción del 10% sobre los salarios de 2015.

c) En general, sugieren que el sueldo aumente un 10% cada año impar y que disminuya un 10% cada año par.

8. Si se aplica lo expuesto, analiza si el salario de los trabajadores del año 2016 coincidirá con el que tenían en 2014. Estudia cómo evolucionan los sueldos tras el paso de muchos años.
9. Observa si hay números en los que las siguientes expresiones no pueden ser evaluadas:

$$\frac{x-3}{x+1} \qquad \frac{2x-1}{(x-5)\cdot(2x+7)} \qquad \frac{x}{x^2-2x+1} \qquad \frac{x+y-2}{x^2+3y^2}$$

10. Halla el valor numérico de las siguientes expresiones en los números que se indican:
- $\frac{x-3}{x+1}$ en $x=1$ $\qquad$ $\frac{x}{x^2-2x+1}$ para $x=-2$ $\qquad$ $\frac{x+y-2}{x^2+3y^2}$ en $x=3$ e $y=-1$
- $\frac{-2a+b^2-4}{a^2c-3abc}$ para $a=-1$, $b=0$ e $c=2$ $\qquad$ $\frac{2x-1}{(x-5)\cdot(2x+7)}$ en $x=\frac{1}{2}$

11. Una persona tiene ahorrados 3000 euros y decide depositarlos en un producto bancario con un tipo de interés anual del 2'5 %. Si decide recuperar sus ahorros al cabo de dos años, ¿cuál será la cantidad total de la que dispondrá?
12. Construye un polinomio de grado 2, $p(x)$, tal que $p(-2)=-6$.
13. Considera los polinomios $p(x)=2x^3-x^2+4x-1$, $q(x)=-x^4-3x^3+2x^2-x-5$ y $r(x)=x^2-3x+2$. Haz las siguientes operaciones:

$p+q+r \qquad p-q \qquad p\cdot r \qquad p\cdot r-q$

14. Calcula los productos:

a) $\left(\frac{3ax}{2}-\frac{y}{5}\right)\cdot\left(\frac{-by}{3}\right)$ b) $(0'1x+0'2y-0'3z)\cdot(0'3x-0'2y+0'1z)$ c) $(x-y)\cdot(y-1)\cdot(x+a)$

15. Efectúa las divisiones de polinomios:

$2x^3+x^2-12x+7$ entre $x+3$ $\qquad$ $-4x^4+8x^3+7x^2-21x+8$ entre $2x^2-3x+1$

$-3x^5-2x^3+9x^2+6x-14$ entre $-x^3-2x+3$

16. Calcula los cocientes:

a) $(4x^3):(x^2)$ b) $(4x^3y^3z^4):(3x^2yz^2)$ c) $(x^4-4x^2y+4y^2):(x^2-2y)$

17. Realiza las operaciones entre fracciones algebraicas:
- $\frac{x-1}{x^2}+\frac{2x-1}{x}$ $\qquad$ $\frac{2x+3}{x}+\frac{5}{x+1}$ $\qquad$ $\frac{x-1}{x^2-3x}-\frac{2-x}{x}$
- $\frac{x-1}{x^2-3x}\cdot\frac{2-x}{x}$ $\qquad$ $\frac{x-1}{x^2-3x}:\frac{2-x}{x}$

18. Encuentra un polinomio $p(x)$ tal que al dividir $p(x)$ entre $q(x)=x^3-x^2+2x-3$ se obtenga como polinomio resto $r(x)=-3x^2+1$.
19. Calcula las potencias:

a) $(x+2y-z)^2$ b) $(x-3y)^3$ c) $\left(a+\frac{b}{3}\right)^2$ d) $(x^2-2z^3)^2$

20. Analiza si los siguientes polinomios han surgido del desarrollo de potencias de binomios, o trinomios, o de un producto *suma por diferencia*. En caso afirmativo expresa su procedencia.
- x^2-6x+9 $\qquad$ x^4+8x^2+16 $\qquad$ $x^2-\sqrt{12}\,xy+3y^2$ $\qquad$ $y^4+2y^3+y^2+2y+1$
- $x^4-2x^3+x^2+2x+1$ $\qquad$ x^2-25 $\qquad$ x^2+5 $\qquad$ $5x^2-1$
- x^2-8y^2 $\qquad$ x^4-1 $\qquad$ x^2-y^2 $\qquad$ $x^2-2y^2z^2$

21. Analiza si el numerador y el denominador de las siguientes expresiones algebraicas proceden del desarrollo de un binomio, o de un producto suma por diferencia, y simplifícalas:

a) $\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}$ b) $\frac{x^4-2x^2y^2+y^4}{x^2+y^2}$ c) $\frac{xy^3-yx}{y^4-1}$

22. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\frac{3}{x(3-x)}-\frac{1}{2(3-x)}$ b) $3x^4-5x^3+\frac{x^4-1}{x^3}\cdot\frac{x^5}{x^2+1}$ c) $\frac{x-2y}{a-b}+\frac{4x+5y}{3a-3b}$

23. Simplifica todo lo posible:

a) $\left(yx^4 - \frac{y}{x^2}\right) : \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)$ b) $\frac{b^3 + 3ab^2 + 3a^2b + a^3}{b-a} : \frac{b+a}{b-a}$ c) $\left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}\right) : \frac{4}{a-b}$

24. Simplifica todo lo posible:

a) $\frac{\frac{1}{a+y} - \frac{1}{x}}{\frac{1}{a+y} + \frac{1}{x}} : \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{x+y}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{x+y}}$ b) $\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right) : \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3}\right)$ c) $\frac{\frac{2}{x} - \frac{1}{y}}{\frac{3}{x} + \frac{2}{y}} \cdot \frac{\frac{1}{x} - \frac{3}{y}}{\frac{1}{x} - \frac{2}{y}}$

AUTOEVALUACIÓN

1. Señala los coeficientes que aparecen en las siguientes expresiones algebraicas:

   a) $3 \cdot \sqrt{5} \cdot x \cdot y^2$ b) $-3x^4 - x^3 + x + 7$ c) $\frac{x+8}{4-2y^2} + 6xa^2 - \frac{3}{a} + 9$
2. Destaca las variables, o indeterminadas, de las precedentes expresiones algebraicas.
3. Del polinomio $5x^4 - 8x^2 - x + 9$ indica su grado y los monomios que lo integran.
4. La expresión $\frac{x-7}{4-2x}$ no tiene sentido para

   a) $x = 7$ b) $x = 2$ c) $x = 7$ y $x = 2$ d) $x = 0$
5. Cualquier polinomio:
   a) puede ser evaluado en cualquier número.
   b) no puede ser evaluado en el número cero.
   c) no puede ser evaluado en ciertos números concretos.
6. El valor numérico de la expresión $\frac{x+7}{4-2y^2} + 6xz^2 - \frac{3}{z}$ en $x = 1, y = 2, z = -1$ es:

   a) -11 b) 7 c) 1 d) -5
7. Completa adecuadamente las siguientes frases:
   a) La suma de dos polinomios de grado dos suele ser otro polinomio de grado ……….
   b) La suma de tres polinomios de grado dos suele ser otro polinomio de grado ……….
   c) El producto de dos polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado ……….
   d) La diferencia de dos polinomios de grado dos suele ser otro polinomio de grado ……….
8. Finaliza adecuadamente las siguientes frases:
   a) La suma de dos polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado ……….
   b) La suma de tres polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado ……….
   c) La diferencia de dos polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado ……….
9. Al dividir el polinomio $p(x) = 2x^4 - x^3 + 4$ entre $q(x) = x^2 + 2x + 2$ el polinomio resto resultante:
   a) debe ser de grado 2.
   b) puede ser de grado 2.
   c) debe ser de grado 1.
   d) ninguna de las opciones precedentes.
10. Para que una fracción polinómica $\frac{p(x)}{q(x)}$ sea *equivalente* a un polinomio:
    a) los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ deben ser del mismo grado.
    b) no importan los grados de $p(x)$ y $q(x)$.
    c) el grado del polinomio numerador, $p(x)$, debe ser superior o igual al grado del polinomio denominador, $q(x)$.
    d) el grado del polinomio numerador, $p(x)$, debe ser inferior al grado del polinomio denominador, $q(x)$.

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

CAPÍTULO 5: ECUACIONES Y SISTEMAS.
Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas: 3º B de ESO

1. ECUACIONES DE PRIMER GRADO

1.1. El lenguaje de las ecuaciones

Ya sabes que:

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas.

Ejemplo:

- Si tenemos dos expresiones algebraicas: $7x + 3$ y $5x + 2$, y las unimos con el signo igual obtenemos una ecuación: $7x + 3 = 5x + 2$.

Las expresiones que hay a cada lado del igual se llaman **miembros** de la ecuación. Todas las ecuaciones tienen dos miembros: la expresión que está a la izquierda del signo igual se llama **primer miembro** y la que está a la derecha, **segundo miembro**.

Las letras que contienen las ecuaciones algebraicas (las "partes literales" de sus dos expresiones) se llaman **incógnitas**, que significa literalmente "*desconocidas*". Si todas las letras son iguales, se dice que la ecuación tiene una sola incógnita.

Ejemplo:

- $8x - 2 = 4x + 7$ es una ecuación con una sola incógnita, mientras que
- $3x + y = 5$ o $5x - 9 = 3y$ son ecuaciones con dos incógnitas: x e y.

El **grado** de una ecuación es el mayor exponente que aparece en alguna de sus incógnitas.

Ejemplo:

- $8x - 2 = 4x + 7$ es una ecuación de primer grado, mientras que $2x + 4xy^2 = 1$ es una ecuación de tercer grado ya que el monomio $5xy^2$ tiene grado 3 (1 + 2 = 3).

Actividades propuestas

1. Copia en tu cuaderno la siguiente tabla y complétala:

Ecuación	Primer miembro	Segundo miembro	Incógnitas
$8x - 1 = 4x - 7$			
	$5x + 9$	$3x - 1$	
$2a + 3 = 32$			
	$2x - 5y$	$5 + 4y$	

2. Indica el número de incógnitas de las siguientes ecuaciones:

a) $4x - 5y = 7x + 6$; b) $2x + 8y^2 = 5$ c) $3a + 6a^2 = 3$ d) $4x + 8x^2 = 12$.

3. Indica el grado de las siguientes ecuaciones:

a) $2x - 4 = 6x + 8$; b) $3x + 9y^2 = 12$ c) $5x + 10x^2 = 30$ d) $2x + 2xy^2 = 3$

1.2. Ecuaciones equivalentes. Resolución de ecuaciones

Ya sabes que:

Una **solución** de una ecuación es un número que, cuando la incógnita toma ese valor, se verifica la igualdad, es decir, los dos términos de la ecuación valen lo mismo.

Algunas ecuaciones solo tienen una solución, pero otras pueden tener varias.

Resolver una ecuación es encontrar todas sus posibles soluciones numéricas.

Para resolver una ecuación lo que se hace habitualmente es transformarla en otra ecuación **equivalente** más sencilla.

Ecuaciones equivalentes son las que tienen las mismas soluciones.

Ejemplo:

- $2x - 9 = 15$ es equivalente a $2x = 24$, puesto que la solución de ambas ecuaciones es $x = 12$.

Para obtener ecuaciones equivalentes se tienen en cuenta las siguientes propiedades:

Si se **suma** o se **resta** a los dos miembros de una ecuación una misma cantidad, se obtiene una ecuación equivalente.

Si se **multiplican** o **dividen** los dos miembros de una ecuación por una misma cantidad (distinta de cero), se obtiene una ecuación equivalente.

Actividades resueltas

- Resuelve la ecuación $5x + 7 = x - 3$ transformándola en otra más sencilla equivalente.

Transformar una ecuación hasta que sus soluciones se hagan evidentes se llama "*resolver la ecuación*". Siguiendo estos pasos intentaremos resolver la ecuación: $5x + 7 = x - 5$.

1) Sumamos a los dos miembros $-x$ y restamos a los dos miembros 7: $5x - x + 7 - 7 = x - x - 5 - 7$.

2) Hacemos operaciones y conseguimos otra ecuación que tiene en el primer miembro los términos con x y en el segundo, los términos sin x: $5x - x = -5 - 7$.

3) Efectuamos las sumas en el primer miembro y en el segundo: $4x = -12$.

4) Despejamos x dividiendo los dos miembros por 4: $\frac{4x}{4} = \frac{-12}{4}$ de donde $x = -3$.

5) Comprueba que todas las ecuaciones que hemos obtenido en este proceso son equivalentes y que su solución es $x = -3$.

El procedimiento utilizado en las actividades es un método universal para **resolver** cualquier ecuación de grado 1, es decir, donde x aparece sin elevar a otro exponente como en x^2. Las ecuaciones de primer grado tienen siempre una única solución, pero en general, las soluciones no tienen porqué ser números enteros como en los ejemplos.

Actividades propuestas

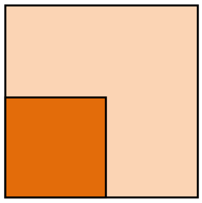
4. Resuelve las siguientes ecuaciones: a) $2x - 3 = 4x - 5$ b) $3x + 6 = 9x - 12$ c) $4x + 8 = 12$

2. ECUACIONES DE 2º GRADO

Hay ecuaciones de segundo grado que ya sabes resolver. En este capítulo vamos a profundizar y a aprender a resolver este tipo de ecuaciones. Por ejemplo, el siguiente problema ya sabes resolverlo:

Actividades resueltas

- Se aumenta el lado de una baldosa cuadrada en 3 cm y su área ha quedado multiplicada por 4, ¿Qué lado tenía la baldosa?



Planteamos la ecuación:

$$(x + 3)^2 = 4x^2$$

¡Esta ecuación si sabes resolverla! $x + 3 = 2x$, luego el lado es de 3 cm.

Hay otra solución, $x = -1$, que no tiene sentido como lado de un cuadrado.

Vamos a estudiar de forma ordenada estas ecuaciones.

2.1. Concepto de ecuación de 2º grado

Una **ecuación de segundo grado** es una ecuación polinómica en la que la mayor potencia de la incógnita es 2. Las ecuaciones de segundo grado se pueden escribir de la forma: $ax^2 + bx + c = 0$ donde a, b y c son números reales, con $a \neq 0$.

Ejemplo 1:

- Son ecuaciones de 2º grado por ejemplo

$$3x^2 - 7x + 1 = 0; \quad -2x^2 + 5x + -2 = 0; \qquad x^2 - 9x - 11 = 0.$$

Ejemplo 2:

- Los coeficientes de las ecuaciones de 2º grado son números reales, por lo tanto pueden ser fracciones o raíces. Por ejemplo: $\frac{3}{5}x^2 - 4x + \frac{1}{2} = 0$; $\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{3}{4} = 0$; $-2{,}7x^2 + 3{,}5x + -0{,}2 = 0$; $\sqrt{2}x^2 + 3x - \sqrt{5} = 0$.

Actividades propuestas

5. Indica si son ecuaciones de segundo grado las siguientes ecuaciones:

a) $5x^2 - \sqrt{2}x + 8 = 0$ c) $8x^2 - 9 = 0$ e) $2x^2 - \frac{3}{x} = 0$

b) $3xy^2 - 5 = 0$ d) $8 - 7{,}3x = 0$ f) $2x^2 - 3\sqrt{x} + 4 = 0$

6. En las siguientes ecuaciones de segundo grado, indica quiénes son a, b y c.

a) $3 - 4x^2 + 9x = 0$ b) $-3x^2 + 5x = 0$ c) $2x^2 - 3 = 0$ d) $x^2 - 8x + 1 = 0$

2.2. Resolución de ecuaciones de 2º grado completas

Se llama **ecuación de segundo grado completa** a aquella que tiene valores distintos de cero para a, b y c.

Para resolver las ecuaciones de segundo grado completas, usaremos la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esta fórmula nos permite calcular las dos soluciones de nuestra ecuación.

Llamaremos **discriminante** a la parte de la fórmula que está en el interior de la raíz:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Actividades resueltas

- *Resuelve la ecuación de segundo grado* $x^2 - 5x + 6 = 0$

Primero debemos saber quiénes son a, b y c:

$$a = 1;\ b = -5;\ c = 6$$

Sustituyendo estos valores en nuestra fórmula, obtenemos: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$

Por lo tanto, nuestras dos soluciones son: $x_1 = \frac{5+1}{2} = 3$; $x_2 = \frac{5-1}{2} = 2$

En efecto, $3^2 - 5\cdot 3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$, y $2^2 - 5\cdot 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$, luego 3 y 2 son soluciones de la ecuación.

Actividades propuestas

7. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado completas:

a) $x^2 - 7x + 10 = 0$ b) $2x^2 + 2x - 24 = 0$ c) $3x^2 - 9x + 6 = 0$ d) $x^2 - 4x - 12 = 0$

2.3. Número de soluciones de una ecuación de 2º grado completa

Antes hemos definido lo que era el **discriminante**, ¿te acuerdas?

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Para saber cuántas soluciones tiene una ecuación de 2º grado, nos vamos a fijar en el signo del discriminante.

Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales y distintas.

Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales iguales, (una solución doble).

Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene solución.

Ejemplo 3:

a) La ecuación $x^2 - 4x - 5 = 0$ tiene como discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\cdot 1\cdot(-5) = 16 + 20 = 36 > 0$$

Por lo tanto, la ecuación dada tiene 2 soluciones reales y distintas, 5 y –1. (*Comprobación:* $5^2 - 4\cdot 5 - 5 = 25 - 20 - 5 = 0$ y $(-1)^2 - 4(-1) - 5 = 1 + 4 - 5 = 0$).

b) La ecuación $x^2 - 2x + 1 = 0$ tiene como discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot 1 = 4 - 4 = 0$$

Por lo tanto, la ecuación tiene dos soluciones reales iguales. Se puede escribir como:
$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 = 0$, que tiene la solución doble $x = 1$.

c) La ecuación $x^2 + 3x + 8 = 0$ tiene como discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4\cdot 1\cdot(8) = 9 - 32 = -23 < 0$$

Por lo tanto, la ecuación no tiene solución real. Ningún número real verifica la ecuación.

Actividades propuestas

8. Averigua cuántas soluciones tienen las siguientes ecuaciones de 2º grado:

a) $x^2 + x + 4 = 0$ b) $x^2 - 6x + 9 = 0$ c) $x^2 - 6x - 7 = 0$ d) $x^2 - 3x + 5 = 0$

2.4. Resolución de ecuaciones de 2º grado incompletas

Llamamos **ecuación de 2º grado incompleta** a aquella ecuación de segundo grado en la que el coeficiente b vale 0 (falta b), o el coeficiente c vale 0 (falta c).

Ejemplo 4:

La ecuación de 2º grado $2x^2 - 18 = 0$ es incompleta porque el coeficiente $b = 0$, es decir, falta b.

La ecuación de 2º grado $3x^2 - 15x = 0$ es incompleta porque no tiene c, es decir, $c = 0$.

Las ecuaciones de 2º grado incompletas se resuelven de una manera u otra dependiendo del tipo que sean.

Si el coeficiente $b = 0$: Despejamos la incógnita normalmente, como hacíamos en las ecuaciones de primer grado:

$$ax^2 + c = 0 \Rightarrow ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = \frac{-c}{a} \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{-c}{a}} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Si el coeficiente $c = 0$: Sacamos factor común:

$$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0.$$

Para que el producto de dos factores valga cero, uno de los factores debe valer cero.

Por tanto $x = 0$, o $ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$

Resumen

Si $b = 0$, $ax^2 + c = 0$, despejamos la incógnita:

$$x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}.$$

Si $c = 0$, $ax^2 + bx = 0$, sacamos factor común:

$x = 0$ y $x = \frac{-b}{a}$.

Ejemplo 5:

En la ecuación $2x^2 - 18 = 0$ falta la b. Para resolverla despejamos la incógnita, es decir, x^2:

$$2x^2 - 18 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 18/2 = 9$$

Una vez que llegamos aquí, nos falta quitar ese cuadrado que lleva nuestra incógnita. Para ello, haremos la raíz cuadrada en los 2 miembros de la ecuación:

$$x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

Así hemos obtenido las dos soluciones de nuestra ecuación, 3 y –3.

En efecto, $2\cdot 3^2 - 18 = 2\cdot 9 - 18 = 0$, y $2\cdot(-3)^2 - 18 = 2\cdot 9 - 18 = 0$

Ejemplo 6:

En la ecuación $3x^2 - 15x = 0$ falta la c. Para resolverla, sacamos factor común:

$3x^2 - 15x = 0 \Rightarrow 3x(x - 5) = 0$

Una vez que llegamos aquí, tenemos dos opciones

1) $3x = 0 \Rightarrow x = 0$.
2) $x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$.

Así hemos obtenido las dos soluciones de la ecuación $x = 0$ y $x = 5$

Una ecuación de segundo grado incompleta también se puede resolver utilizando la fórmula de las completas pero es un proceso más lento y es más fácil equivocarse.

Actividades resueltas

- Resuelve la ecuación de 2º grado $2x^2 - 32 = 0$:

Solución: Se trata de una ecuación de 2º grado incompleta donde falta la b. Por lo tanto, despejamos la incógnita

$2x^2 - 32 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 32 \Rightarrow x^2 = 32/2 = 16 \Rightarrow x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$. Las raíces son 4 y -4.

- Resuelve la ecuación de 2º grado $x^2 + 7x = 0$:

Solución: Se trata de una ecuación de 2º grado incompleta donde falta la c. Por lo tanto, sacamos factor común:

$x^2 + 7x = 0 \Rightarrow x(x + 7) = 0$

y obtenemos las dos soluciones: $x = 0$ y $x + 7 = 0 \Rightarrow x = -7$.

Actividades propuestas

9. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado incompletas:

a) $3x^2 + 6x = 0$ b) $3x^2 - 27 = 0$ c) $x^2 - 25 = 0$ d) $2x^2 + x = 0$ e) $4x^2 - 9 = 0$ f) $5x^2 - 10x = 0$

1.5. Suma y producto de raíces

Si en una ecuación de segundo grado: $x^2 + bx + c = 0$, con $a = 1$, conocemos sus soluciones: x_1 y x_2 sabemos que podemos escribir la ecuación de forma factorizada: $(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$

Hacemos operaciones: $x^2 - x_1 \cdot x - x_2 \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0 \Rightarrow x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0$, por lo que el coeficiente c es igual al producto de las soluciones y la suma de las soluciones es igual al opuesto del coeficiente b, es decir, $-b$.

$$x_1 \cdot x_2 = c;\ x_1 + x_2 = -b.$$

Si la ecuación es $ax^2 + bx + c = 0$, dividiendo por a, ya tenemos una de coeficiente $a = 1$, y obtenemos que:

$$x_1\, x_2 = \frac{c}{a};\ x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

Esta propiedad nos permite, en ocasiones, resolver mentalmente algunas ecuaciones de segundo grado.

Actividades resueltas

- Resuelve mentalmente la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Buscamos, mentalmente dos números cuyo producto sea 6 y cuya suma sea 5. En efecto, $2 \cdot 3 = 6$, y $2 + 3 = 5$, luego las soluciones de la ecuación son 2 y 3.

- Resuelve mentalmente la ecuación $x^2 - 6x + 9 = 0$.

El producto debe ser 9. Probamos con 3 como solución, y en efecto $3 + 3 = 6$. Las soluciones son la raíz 3 doble.

- Resuelve mentalmente la ecuación $x^2 - x - 2 = 0$.

Las soluciones son -1 y 2, pues su producto es -2 y su suma 1.

- Resuelve mentalmente la ecuación $x^2 + x - 2 = 0$.

Las soluciones son 1 y -2, pues su producto es -2 y su suma -1.

Actividades propuestas

10. Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones de 2º grado:

a) $x^2 + 6x = 0$ b) $x^2 + 2x - 8 = 0$ c) $x^2 - 25 = 0$

d) $x^2 - 9x + 20 = 0$ e) $x^2 - 3x - 4 = 0$ f) $x^2 - 4x - 21 = 0$

11. Escribe una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean 3 y 7.
12. El perímetro de un rectángulo mide 16 cm y su área 15 cm². Calcula sus dimensiones.
13. Si 3 es una solución de $x^2 - 5x + a = 0$, ¿cuánto vale a?

2.6. Resolución de ecuaciones sencillas de grado superior a dos.

Durante siglos los algebristas han buscado fórmulas, como la que ya conoces de la ecuación de segundo grado, que resolviera las ecuaciones de tercer grado, de cuarto, de quinto… sin éxito a partir del quinto grado. Las fórmulas para resolver las ecuaciones de tercer y cuarto grado son complicadas. Sólo sabemos resolver de forma sencilla algunas de estas ecuaciones.

Ejemplo:

- Resuelve: $(x-5)\cdot(x-3)\cdot(x+2)\cdot(x-9)\cdot(x-6)=0$.

Es una ecuación **polinómica** de grado cinco, pero al estar factorizada sabemos resolverla pues para que el producto de varios factores sea cero, uno de ellos debe valer cero.

Igualando a cero cada factor tenemos que las soluciones son 5, 3, –2, 9 y 6.

Ecuaciones bicuadradas

Una **ecuación bicuadrada** es una ecuación de la forma $ax^{2n}+bx^n+c=0$.

Para resolverla, hacemos el cambio $x^n=t$, convirtiéndola así en una ecuación de segundo grado de fácil resolución.

Cuando hayamos calculado el valor de t, deshacemos el cambio efectuado, $x=\sqrt[n]{t}$ para obtener la solución x.

Las ecuaciones bicuadradas más comunes son las de cuarto grado

Ejemplo:

- *Para resolver la ecuación bicuadrada* $x^4-10x^2+9=0$, hacemos el cambio obteniendo la ecuación de segundo grado $t^2-10t+9=0$.

Resolvemos dicha ecuación de segundo grado:

$$t=\frac{10\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot1\cdot9}}{2\cdot1}=\frac{10\pm8}{2}$$

$$t_1=\frac{10+8}{2}=9 \quad y \quad t_2=\frac{10-8}{2}=1$$

Deshacemos el cambio para obtener los valores de x:

$$Si\ t_1=9\rightarrow x=\pm\sqrt{9}=\pm3$$

$$Si\ t_2=1\rightarrow x=\pm\sqrt{1}=\pm1$$

Actividades resueltas

- *La ecuación* $x^4-5x^2+4=0$ es una ecuación polinómica de cuarto grado, pero con una forma muy especial, es una ecuación **bicuadrada**, porque podemos transformarla en una ecuación de segundo grado llamando a x^2 por ejemplo, t.

$$x^4-5x^2+4=0\Rightarrow t^2-5t+4=0\Rightarrow t=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{5\pm3}{2}$$

Una solución de la ecuación de segundo grado es $t=4$, y la otra es $t=1$. Por tanto si $t=x^2=4$, entonces $x=2$ y $x=-2$. Y si $t=x^2=1$, entonces $x=1$ y $x=-1$. Nuestra ecuación de cuarto grado tiene cuatro soluciones: 2, –2, 1 y –1.

Actividades propuestas

14. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $(x-7)\cdot(x-2)\cdot(x+5)\cdot(x-3)\cdot(x-11)=0$ b) $3(x-5)\cdot(x-7)\cdot(x+2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)=0$

15. Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas:

a) $x^4-3x^2+2=0$ b) $x^4+12x^2+35=0$ c) $x^4-4x^2-12=0$.

16. Resuelve las ecuaciones bicuadradas siguientes:

a) $x^4-13x^2+36=0$ b) $x^4-29x^2+100=0$ c) $x^4-10x^2+9=0$ d) $x^4-26x^2+25=0$.

3. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

3.1. Concepto de sistema de ecuaciones lineales

Un **sistema de ecuaciones lineales** con dos incógnitas se puede expresar de la forma:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

Donde *a, b, a'* y *b'* son números reales que se denominan **coeficientes** y *c* y *c'* también son números reales llamados **términos independientes**.

Llamamos **solución** del sistema al par de valores (x, y) que satisfacen las dos ecuaciones del sistema.

Se dice que dos sistemas de ecuaciones son **equivalentes**, cuando tienen la misma solución.

Ejemplo 7:

- Son sistemas de ecuaciones lineales, por ejemplo:

$$\begin{cases}3x-4y=-1\\2x+5y=7\end{cases};\quad \begin{cases}5x+2y=7\\x-y=0\end{cases};\quad \begin{cases}x+2y=3\\7x-3y=4\end{cases};\quad \begin{cases}4y+2=3x\\7x-3=5y\end{cases}$$

Ejemplo 8:

- No es un sistema lineal $\begin{cases} 3xy + 5y = 7 \\ 4x - 8xy = 9 \end{cases}$ porque tiene términos en *xy*.
- Tampoco lo es $\begin{cases} 3x^2 + 5y = 7 \\ 4x - 8y = 9 \end{cases}$ porque tiene un término en x^2.

Actividades propuestas

17. Razona si son o no sistemas de ecuaciones lineales los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} xy + 2y = 6 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5y - x = 4 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x - 2 = y \\ 3x + 5y = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + y = 2 \\ 3x + y^2 = 4 \end{cases}$

3.2. Clasificación de sistemas de ecuaciones

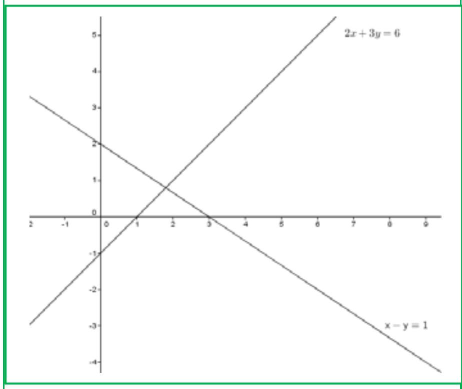
En un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, cada una de las ecuaciones representa una recta en el plano.

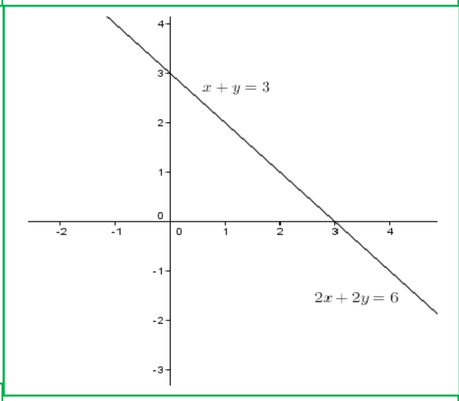
Estas rectas pueden estar posicionadas entre sí de tres maneras distintas, lo que nos ayudará a clasificar nuestro sistema en:

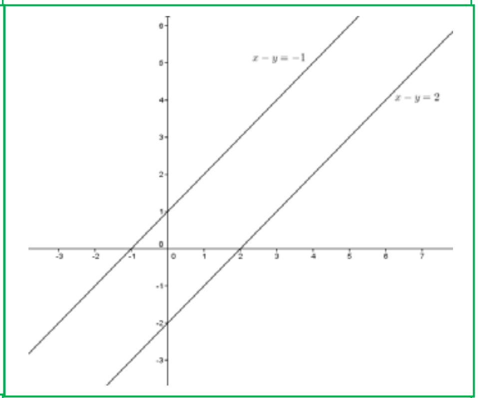
1) **Compatible determinado**: el sistema tiene una única solución, por lo que las rectas son **SECANTES**, se cortan en un punto.

2) **Compatible indeterminado**: el sistema tiene infinitas soluciones, por lo que las rectas son **COINCIDENTES.**

3) **Incompatible**: el sistema no tiene solución, por lo que las rectas son **PARALELAS.**





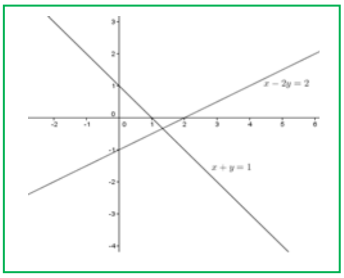


Compatible determinado	Compatible indeterminado	Incompatible
Rectas secantes	Rectas coincidentes	Rectas paralelas

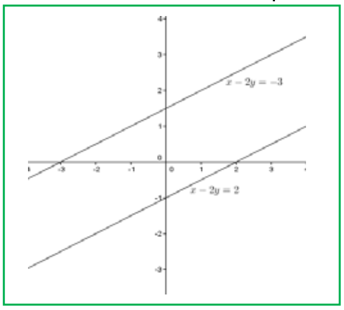
Actividades resueltas

- Añade una ecuación a $x - 2y = 2$ para que el sistema resultante sea:
  a) Compatible determinado
  b) Incompatible
  c) Compatible indeterminado

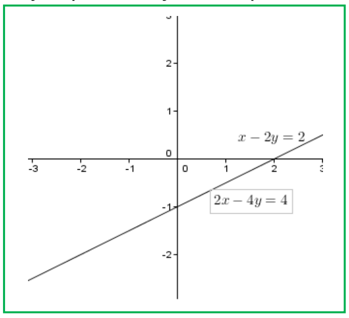
Solución:



a) Para que el sistema sea compatible determinado, añadiremos una ecuación que no tenga los mismos coeficientes que la que nos dan. Por ejemplo, $x + y = 1$.



b) Para que sea incompatible, los coeficientes de las incógnitas tienen que ser los mismos (o proporcionales) pero tener diferente término independiente. Por ejemplo $x - 2y = -3$, (o $2x - 4y = 0$).



c) Para que sea compatible indeterminado, pondremos una ecuación proporcional a la que tenemos. Por ejemplo $2x - 4y = 4$.

Actividades propuestas

18. Representa los siguientes sistemas y clasifícalos:

a) $\begin{cases} x+3y=4 \\ -2x+y=-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-y=3 \\ -y+2x=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-3y=3 \\ 2x-6y=6 \end{cases}$

3.3. Resolución de sistemas por el método de sustitución

El **método de sustitución** consiste en despejar una incógnita de una de las ecuaciones del sistema y sustituir la expresión obtenida en la otra ecuación.

Así, obtenemos una ecuación de primer grado en la que podemos calcular la incógnita despejada. Con el valor obtenido, obtenemos el valor de la otra incógnita.

Ejemplo 8:

- Vamos a resolver el sistema $\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+2y=3 \end{cases}$ por el método de sustitución:

Despejamos *x* de la segunda ecuación: $\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+2y=3 \Rightarrow x=3-2y \end{cases}$

y lo sustituimos en la primera: $2(3 - 2y) - 3y = -1 \Rightarrow 6 - 4y - 3y = -1 \Rightarrow -4y - 3y = -1 - 6 \Rightarrow -7y = -7 \Rightarrow y = (-7)/(-7) = 1$

Con el valor obtenido de *y*, calculamos la *x*: $x = 3 - 2y \Rightarrow x = 3 - 2\cdot 1 = 1$.

Solución:

$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

Actividades propuestas

19. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 3x+4y=-7 \\ x-2y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+4y=0 \\ 3x+y=5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-2y=2 \\ 2x+3y=10 \end{cases}$

3.4. Resolución de sistemas por el método de igualación

El **método de igualación** consiste en despejar la misma incógnita de las dos ecuaciones que forman el sistema e igualar los resultados obtenidos.

Así, obtenemos una ecuación de primer grado en la que podremos calcular la incógnita despejada. Con el valor obtenido, calculamos el valor de la otra incógnita.

Ejemplo 8:

- Vamos a resolver el sistema $\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+2y=3 \end{cases}$ por el método de igualación:

Despejamos la misma incógnita de las dos ecuaciones que forman el sistema: $\begin{cases} 2x-3y=-1 \Rightarrow x=\dfrac{3y-1}{2} \\ x+2y=3 \Rightarrow x=3-2y \end{cases}$

Igualamos ahora los resultados obtenidos y resolvemos la ecuación resultante:

$$\frac{3y-1}{2}=3-2y \Rightarrow 3y-1=2(3-2y)=6-4y \Rightarrow 3y+4y=6+1 \Rightarrow 7y=7 \Rightarrow y=\frac{7}{7}=1$$

Con el valor obtenido de *y*, calculamos la *x*: $x = 3 - 2y \Rightarrow x = 3 - 2\cdot(1) = 1$

Solución:

$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

Actividades propuestas

20. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:

a) $\begin{cases} 3x+y=2 \\ -2x+3y=-5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-3y=-5 \\ 4x+2y=14 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x-4y=3 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$

3.5. Resolución de sistemas por el método de reducción

El **método de reducción** consiste en eliminar una de las incógnitas sumando las dos ecuaciones. Para ello se multiplican una o ambas ecuaciones por un número de modo que los coeficientes de *x* o *y* sean iguales pero de signo contrario.

Ejemplo 9:

Vamos a resolver el sistema $\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+2y=3 \end{cases}$ por el método de reducción:

Multiplicamos la segunda ecuación por -2 para que los coeficientes de la *x* sean iguales pero de signo contrario y sumamos las ecuaciones obtenidas:

$$\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+2y=3 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-2)} \begin{cases} 2x-3y=-1 \\ -2x-4y=-6 \end{cases} \xrightarrow{sumamos} -7y = -7 \Rightarrow y = (-7)/(-7) = 1$$

Con el valor obtenido de *y*, calculamos la *x*: $2x - 3\cdot1 = -1 \Rightarrow 2x = -1 + 3 = 2 \Rightarrow x = 2/2 = 1$

Solución:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Actividades propuestas

21. Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:

a) $\begin{cases} 3x+y=4 \\ 2x-5y=14 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x+3y=2 \\ 4x+y=7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+3y=0 \\ 3x-2y=13 \end{cases}$

4. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

4.1. Resolución de problemas mediante ecuaciones de primer grado

Ya sabes que:

Muchos problemas pueden resolverse mediante una ecuación.

Actividades resueltas

- Busca un número que sumado con su siguiente dé como resultado 15.

Para resolverlo vamos a seguir técnicas generales de resolución de problemas:

Paso 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Lee con mucho cuidado el enunciado, y pregúntate:

¿Qué te piden? ¿Qué datos tienes?

Nos piden un número. La **incógnita** es ese número. Llama a ese número *x*. Su siguiente, será *x* + 1. Nos dicen que la suma de ambos es 15.

Paso 2: Busca una buena estrategia.

Es un problema que queremos resolver mediante una ecuación. Escribe en lenguaje algebraico el enunciado del problema y plantea una ecuación: $x + (x + 1) = 15$.

Pregúntate si efectivamente resuelve el problema releyendo el enunciado.

Paso 3: Lleva adelante tu estrategia

Ahora sí, ahora resuelve la ecuación. Para resolver una ecuación conviene seguir un orden de actuación que nos ayude a no cometer errores, para ello seguimos el procedimiento que acabamos de aprender.

- Quita, si los hay, paréntesis y denominadores: $x + x + 1 = 15$.
- Para poner en el primer miembro los términos con *x*, y en el segundo los que no lo tienen, **haz lo mismo a los dos lados**, resta 1 a los dos miembros: $x + x + 1 - 1= 15 - 1$, luego $x + x = 15 - 1$. Opera: $2x = 14$. Despeja:
- Para despejar la *x*, se hace lo mismo a los dos lados, se dividen por 2 ambos miembros: $2x/2 = 14/2$, por tanto, $x = 7$.

Paso 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable.

En efecto, comprueba que: 7 + 8 = 15.

Actividades propuestas

22. En un hotel hay 47 habitaciones simples y dobles. Si en total tiene 57 camas, ¿cuántas habitaciones son simples y cuántas son dobles?

23. En una granja hay 100 animales entre gallinas y conejos, y entre todos los animales suman 280 patas. ¿Cuántas gallinas hay en la granja?

4.2. Resolución de problemas mediante ecuaciones de 2º grado

Para resolver problemas por medio de ecuaciones de 2º grado, del mismo modo que los problemas de ecuaciones de primer grado, primero tendremos que pasar a lenguaje algebraico el enunciado del problema y luego resolverlo siguiendo los siguientes pasos:

1.- Comprender el enunciado
2.- Identificar la incógnita
3.- Traducir el enunciado al lenguaje algebraico
4.- Plantear la ecuación y resolverla
5.- Comprobar la solución obtenida

Actividades resueltas

Vamos a resolver el siguiente problema:

- *¿Cuál es el número natural cuyo quíntuplo aumentado en 6 es igual a su cuadrado?*

Una vez comprendido el enunciado, identificamos la incógnita, que en este caso, es el número que estamos buscando.

2.- Número buscado = x

3.- Traducimos ahora el problema al lenguaje algebraico: $5x + 6 = x^2$

4.- Resolvemos la ecuación:

$$5x + 6 = x^2 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2}$$

$$x_1 = \frac{5+7}{2} = 6\,; \quad x_2 = \frac{5-7}{2} = -1$$

Solución: Como el enunciado dice "número natural" el número buscado es el 6.

5.- *Comprobación*: En efecto $5\cdot 6 + 6 = 36 = 6^2$.

Actividades propuestas

24. ¿Qué número multiplicado por 3 es 40 unidades menor que su cuadrado?
25. Calcula tres números consecutivos tales que la suma de sus cuadrados sea 365.
26. El triple del cuadrado de un número aumentado en su duplo es 85. ¿Cuál es el número?
27. Un triángulo isósceles tiene un perímetro de 20 cm y la base mide 4 cm, calcula los lados del triángulo y su área.

4.3. Resolución de problemas mediante sistemas de ecuaciones

Para resolver problemas por medio de sistemas de ecuaciones, primero tendremos que pasar a lenguaje algebraico el enunciado del problema y luego resolverlo siguiendo los siguientes pasos:

1.- Comprender el enunciado

2.- Identificar las incógnitas

3.- Traducir el enunciado al lenguaje algebraico

4.- Plantear el sistema y resolverlo

5.- Comprobar la solución obtenida

Actividades resueltas

Vamos a resolver el siguiente problema:

- *La suma de las edades de un padre y su hijo es 39 y su diferencia 25. ¿Cuál es la edad de cada uno?*

Una vez comprendido el enunciado, identificamos las incógnitas que, en este caso, son la edad del padre y el hijo

2.- Edad del padre = x

Edad del hijo = y

3.- Pasamos el enunciado a lenguaje algebraico:

La suma de sus edades es 39: $x + y = 39$

Y su diferencia 25: $x - y = 25$

4.- Planteamos el sistema y lo resolvemos por el método que nos resulte más sencillo. En este caso, lo hacemos por reducción:

$$\begin{cases} x + y = 39 \\ x - y = 25 \end{cases} \xrightarrow{\textit{sumamos}} 2x = 64 \Rightarrow x = 64/2 = 32$$

$x + y = 39 \Rightarrow 32 + y = 39 \Rightarrow y = 39 - 32 = 7$.

Solución: El padre tiene 32 años y el hijo tiene 7 años.

5.- *Comprobación:* En efecto, la suma de las edades es $32 + 7 = 39$ y la diferencia es $32 - 7 = 25$.

Actividades propuestas

28. La suma de las edades de Raquel y Luis son 65 años. La edad de Luis más cuatro veces la edad de Raquel es igual a 104. ¿Qué edad tienen cada uno?
29. La suma de las edades de María y Alberto es 32 años. Dentro de 8 años, la edad de Alberto será dos veces la edad de María. ¿Qué edad tiene cada uno en la actualidad?
30. Encuentra dos números cuya diferencia sea 24 y su suma sea 123.

RESUMEN

Ecuación de primer grado	Es una ecuación algebraica en la que la mayor potencia de la incógnita es 1.	$-5x + 6 = 0$
Ecuación de segundo grado	Es una ecuación algebraica en la que la mayor potencia de la incógnita es 2. Tiene la forma: $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son números reales, con $a \neq 0$.	$-3x^2 + 7x + -8 = 0$
Resolución de ecuaciones de 2º grado completas	Se usa la fórmula: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x^2 - 5x + 6 = 0$: $x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4\cdot 1\cdot 6}}{2\cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2}$ $x_1 = 3$, $x_2 = 2$
Discriminante	$\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta = (-5)^2 - 4\cdot 1\cdot 6 = 25 - 24 = 1$
Número de soluciones de una ecuación de 2º grado	Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, tiene dos soluciones reales y distintas Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, tiene una solución doble. Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene solución	$x^2 - 4x - 5 = 0$: $\Delta = 36 > 0$, tiene dos soluciones 5 y -1. $x^2 - 2x + 1 = 0$: $\Delta = 0$, tiene una raíz doble: $x = 1$. $x^2 + 3x + 8 = 0$: $\Delta = -23$. No tiene solución real
Resolución de ecuaciones de 2º grado incompletas	Si $b = 0$, $ax^2 + c = 0$, despejamos la incógnita: $x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$. Si $c = 0$, $ax^2 + bx = 0$: $x = 0$ y $x = \frac{-b}{a}$	$2x^2 - 18 = 0$: $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$ $3x^2 - 15x = 0 \Rightarrow 3x(x - 5) = 0 \Rightarrow$ $x_1 = 0$; $x_2 = 5$.
Suma y producto de raíces	$x_1\, x_2 = \frac{c}{a}$; $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$	$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$; $x_2 = 3$
Sistema de ecuaciones lineales	$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$	$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 7x - 3y = 4 \end{cases}$
Clasificación	**Compatible determinado**: Una única solución, el punto de intersección. Las rectas son **secantes**: $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$ **Compatible indeterminado**: Infinitas soluciones, por lo que las rectas son **coincidentes:** $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ 2x - 6y = 6 \end{cases}$ **Incompatible**: No tiene solución, las rectas son **paralelas**: $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ 2x - 6y = 2 \end{cases}$	
Métodos de resolución	**Sustitución:** despejar una incógnita y sustituir en la otra ecuación. **Igualación:** despejar la misma incógnita de las dos ecuaciones. **Reducción:** sumar las dos ecuaciones, multiplicándolas por números adecuados.	

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

Ecuaciones de primer grado

1. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado

a) $-x - 6x - 8 = 0$ b) $-1 + x = 6$ c) $7x = 70x + 5$

d) $2(x + 3) - (2x + 1) = 5$ e) $5(2x - 1) + (x - 1) = 5$ f) $12(x - 1) - 6(2 + x) = -18$

g) $(2x + 3) + (x - 1) = -x - 3$ h) $x + 2 = 2x + 168$ i) $6(2x - 3x + 1) - 2x - 1 = -1$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado con denominadores:

a) $\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{3} = 10$ b) $\frac{x-3}{3} + \frac{-x+1}{7} = 3$ c) $\frac{x+1}{5} + \frac{2x+6}{10} = 2$

d) $\frac{1-x}{2} + \frac{3x-1}{3} = \frac{1}{3}$ e) $\frac{2x-8}{5} - \frac{3x-9}{10} = x-1$ f) $\frac{2x+3x}{5} - \frac{3x-6}{10} = 1$

Ecuaciones de segundo grado

3. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado

a) $-x^2 - 6x - 8 = 0$ b) $x(-1 + x) = 6$ c) $7x^2 = 70x$

d) $2(x + 3) - x(2x + 1) = 5$ e) $5(2x - 1) + x(x - 1) = 5$ f) $12(x^2 - 1) - 6(2 + x) = -18$

g) $(2x + 3)\cdot(x - 1) = -x - 3$ h) $x\cdot(x + 2) = 168$ i) $6(2x^2 - 3x + 1) - x(2x - 1) = -1$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado con denominadores:

a) $\frac{x^2-1}{2} - \frac{x+1}{3} = 10$ b) $\frac{x^2-3}{3} + \frac{x^2-x+1}{7} = 3$ c) $\frac{x^2+1}{5} + \frac{2x+6}{10} = 2$

d) $\frac{1-x^2}{2} + \frac{3x-1}{3} = \frac{1}{3}$ e) $\frac{2x^2-8}{5} - \frac{3x-9}{10} = x-1$ f) $\frac{2x+3x^2}{5} - \frac{3x-6}{10} = 1$

5. Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones de 2º grado:

a) $x^2 - 7x + 10 = 0$ b) $x(-1 + x) = 0$ c) $2x^2 = 50$

d) $x^2 - 3x - 10 = 0$ e) $x^2 + 3x - 10 = 0$ f) $x^2 + 7x + 10 = 0$

g) $x^2 - 5x + 6 = 0$ h) $x^2 - x - 6 = 0$ i) $x^2 + x - 6 = 0$

6. Factoriza las ecuaciones del problema anterior. Así, si las soluciones son 2 y 5, escribe:

$x^2 - 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)\cdot(x - 5) = 0$.

Observa que si el coeficiente de x^2 fuese distinto de 1 los factores tienen que estar multiplicados por dicho coeficiente.

7. Cuando el coeficiente b es par ($b = 2B$), puedes simplificar la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2B \pm \sqrt{4B^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2B \pm 2\sqrt{B^2 - ac}}{2a} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - ac}}{a}$$

Así para resolver $x^2 - 6x + 8 = 0$ basta decir $x = 3 \pm \sqrt{9-8} = 3 \pm 1$, luego sus soluciones son 2 y 4.

Utiliza esa expresión para resolver:

a) $x^2 - 8x - 12 = 0$ b) $x^2 - 10x + 24 = 0$ c) $x^2 + 4x + 7 = 0$

8. Resuelve mentalmente las ecuaciones siguientes, luego desarrolla las expresiones y utiliza la fórmula general para volver a resolverlas.

a) $(x - 2)\cdot(x - 6) = 0$ b) $(x + 1)\cdot(x - 3) = 0$ c) $(x - 9)\cdot(x - 3) = 0$

d) $(x - 1)\cdot(x + 4) = 0$ e) $(x + 7)\cdot(x - 2) = 0$ f) $(x - 4)\cdot(x + 6) = 0$

9. Determina el número de soluciones reales que tienen las siguientes ecuaciones de segundo grado calculando su discrimínate, y luego resuélvelas.

a) $x^2 + 3x - 4 = 0$ b) $7x^2 + 12x - 4 = 0$ c) $3x^2 + 7x + 10 = 0$

d) $x^2 - x + 5 = 0$ e) $6x^2 - 2x - 3 = 0$ f) $5x^2 + 8x - 6 = 0$

10. Escribe tres ecuaciones de segundo grado que no tengan ninguna solución real. *Ayuda*: Utiliza el discriminante.
11. Escribe tres ecuaciones de segundo grado que tengan una solución doble.
12. Escribe tres ecuaciones de segundo grado que tengan dos soluciones reales y distintas.
13. Escribe tres ecuaciones de segundo grado que no tengan solución real.

Sistemas lineales de ecuaciones

14. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 2x - 5y = -4 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 2x + 5y = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 6x + 5y = 7 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$

15. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:

a) $\begin{cases} -2x+3y=13 \\ 3x-7y=-27 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x-2y=-3 \\ 4x-y=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 9x-5y=4 \\ -8x+3y=-5 \end{cases}$

16. Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:

a) $\begin{cases} 3x-5y=1 \\ 2x+y=5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x+3y=14 \\ -x-6y=7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 9x-5y=4 \\ -7x+5y=-2 \end{cases}$

17. Resuelve de forma gráfica los siguientes sistemas

a) $\begin{cases} x+y=7 \\ x-y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x+3y=4 \\ x-6y=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 9x-5y=13 \\ -7x+5y=-9 \end{cases}$

18. Resuelve los siguientes sistemas por el método que creas más apropiado:

a) $\begin{cases} \dfrac{4x-1}{3}-\dfrac{2y+2}{5}=-1 \\ \dfrac{x+3}{2}+\dfrac{4y-1}{3}=7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{3x-1}{2}-\dfrac{y+3}{5}=-3 \\ 3x+y=-1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2}+\dfrac{y+2}{3}=2 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$

19. Copia en tu cuaderno y completa los siguientes sistemas incompletos de forma que se cumpla lo que se pide en cada uno:

Compatible indeterminado

a) $\begin{cases} (\ )x+3y=(\ ) \\ 2x-y=3 \end{cases}$

Incompatible

b) $\begin{cases} -5x+y=2 \\ (\ )x+y=6 \end{cases}$

Su solución sea x = 2 e y = 1

c) $\begin{cases} 3x-y=(\ ) \\ (\ )x+y=7 \end{cases}$

Incompatible

d) $\begin{cases} 2x-5y=-1 \\ 4x+(\ )y=(\ ) \end{cases}$

Su solución sea x = –1 e y = 1

e) $\begin{cases} 3x+(\ )y=-1 \\ (\ )x+3y=5 \end{cases}$

Compatible indeterminado

f) $\begin{cases} (\ )x+6y=(\ ) \\ 2x+3y=-2 \end{cases}$

20. Escribe tres sistemas lineales que sean incompatibles.
21. Escribe tres sistemas lineales que sean compatibles indeterminados.
22. Escribe tres sistemas lineales que sean compatibles determinados.
23. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación y comprueba la solución gráficamente. ¿De qué tipo es cada sistema?

a) $\begin{cases} -2x+6y=13 \\ x-3y=8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y=-3 \\ 4x-4y=-12 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-y=4 \\ -x+3y=-5 \end{cases}$

Problemas

24. En una tienda alquilan bicicletas y triciclos. Si tienen 51 vehículos con un total de 133 ruedas, ¿cuántas bicicletas y cuántos triciclos tienen?
25. ¿Cuál es la edad de una persona si al multiplicarla por 15 le faltan 100 unidades para completar su cuadrado?
26. Descompón 8 en dos factores cuya suma sea 6
27. El triple del cuadrado de un número aumentado en su duplo es 85. ¿Qué número es?
28. La suma de los cuadrados de dos números impares consecutivos es 394. Determina dichos números.
29. Van cargados un asno y un mulo. El asno se quejaba del peso que llevaba encima. El mulo le contestó: Si yo llevara uno de tus sacos, llevaría el doble de carga que tú, pero si tú tomas uno de los míos, los dos llevaremos igual carga. ¿Cuántos sacos lleva cada uno?
30. ¿Qué número multiplicado por 3 es 40 unidades menor que su cuadrado?
31. Calcula tres números consecutivos cuya suma de cuadrados es 365
32. Dentro de 11 años, la edad de Mario será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. ¿Qué edad tiene Mario?
33. Dos números naturales se diferencian en 2 unidades y la suma de sus cuadrados es 580. ¿Cuáles son dichos números?
34. La suma de dos números es 5 y su producto es –84. ¿De qué números se trata?
35. María quiere formar bandejas de un kilogramo con mazapanes polvorones. Si los polvorones le cuestan a 5 euros el kilo y los mazapanes a 7 euros el kilo, y quiere que el precio de cada bandeja sea de 6 euros, ¿qué cantidad deberá poner de cada producto? Si quiere formar 25 bandejas, ¿Qué cantidad de polvorones y de mazapanes va a necesitar?
36. Determina los catetos de un triángulo rectángulo cuya suma es 7 cm y la hipotenusa de dicho triángulo mide 5 cm.
37. El producto de dos números es 4 y la suma de sus cuadrados 17. Calcula dichos números

38. La suma de dos números es 20. El doble del primero más el triple del segundo es 45. ¿De qué números se trata?
39. En un garaje hay 30 vehículos entre coches y motos. Si en total hay 100 ruedas, ¿cuántos coches y motos hay en el garaje?
40. La edad actual de Pedro es el doble de la de Raquel. Dentro de 10 años, sus edades sumarán 65. ¿Cuántos años tienen actualmente Pedro y Raquel?
41. En mi clase hay 35 personas. Nos han regalado a cada chica 2 bolígrafos y a cada chico 1 cuaderno. Si en total había 55 regalos. ¿Cuántos chicos y chicas somos en clase?
42. Entre mi abuelo y mi hermano tienen 56 años. Si mi abuelo tiene 50 años más que mi hermano, ¿qué edad tiene cada uno?
43. Dos bocadillos y un refresco cuestan 5€. Tres bocadillos y dos refrescos cuestan 8€. ¿Cuál es el precio del bocadillo y el refresco?
44. En una granja hay pollos y vacas. Si se cuentan las cabezas, son 50. Si se cuentan las patas, son 134. ¿Cuántos pollos y vacas hay en la granja?
45. Un rectángulo tiene un perímetro de 172 metros. Si el largo es 22 metros mayor que el ancho, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?
46. En una bolsa hay monedas de 1€ y 2€. Si en total hay 40 monedas y 53€, ¿cuántas monedas de cada valor hay en la bolsa?
47. En una pelea entre arañas y avispas, hay 70 cabezas y 488 patas. Sabiendo que una araña tiene 8 patas y una avispa 6, ¿cuántas moscas y arañas hay en la pelea?
48. Una clase tiene 32 estudiantes, y el número de alumnos es triple al de alumnas, ¿cuántos chicos y chicas hay?
49. Yolanda tiene 6 años más que su hermano Pablo, y su madre tiene 49 años. Dentro de 2 años la edad de la madre será doble de la suma de las edades de sus hijos, ¿Qué edades tiene?

AUTOEVALUACIÓN

1. Las soluciones de la ecuación $3(x^2 - 1) + 2(x^2 - 2x) = 9$ son:
   a) $x = 2$ y $x = 1$ b) $x = 1$ y $x = -3$ c) $x = 1$ y $x = -2/3$ d) $x = 2$ y $x = -6/5$
2. Las soluciones de la ecuación $156 = x(x - 1)$ son:
   a) $x = 11$ y $x = -13$ b) $x = 13$ y $x = -12$ c) $x = 10$ y $x = 14$ d) $x = -12$ y $x = -11$
3. Las soluciones de la ecuación son:
   a) $x = 2$ y $x = 2/3$ b) $x = 1/3$ y $x = 4$ c) $x = 1$ y $x = 4/3$ d) $x = 5/3$ y $x = 3$
4. Las soluciones de la ecuación $(x - 14)^2 + x^2 = (x + 2)^2$ son:
   a) $x = 24$ y $x = 8$ b) $x = 21$ y $x = 3$ c) $x = 5$ y $x = 19$ d) $x = 23$ y $x = 2$
5. Las soluciones de la ecuación $2(x + 2) - x(2 - x) = 0$ son:
   a) Infinitas b) $x = 9$ y $x = 5$ c) no tiene solución d) $x = 1$ y $x = 4$
6. Las rectas que forman el sistema son:
   a) Secantes b) Paralelas c) Coincidentes d) Se cruzan
7. La solución del sistema es:
   a) $x = 2$ e $y = 1$ b) $x = 1$ e $y = 1$ c) $x = 3$ e $y = 2$ d) No tiene solución
8. La solución del sistema es:
   a) $x = 4$ e $y = 2$ b) $x = 3$ e $y = 3$ c) $x = 2$ e $y = -1$ d) $x = 5$ e $y = 1$
9. En una granja, entre pollos y cerdos hay 27 animales y 76 patas. ¿Cuántos pollos y cerdos hay en la granja?
   a) 16 pollos y 11 cerdos b) 15 pollos y 12 cerdos c) 13 pollos y 14 cerdos
10. ¿Cuál es la edad de una persona si al multiplicarla por 15, le faltan 100 unidades para llegar a su cuadrado?
   a) 6 años b) 7 años c) 5 años d) 8 años

CAPÍTULO 6: PROPORCIONALIDAD.
Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas: 3º B de ESO

1. PROPORCIONALIDAD DIRECTA

1.1. Magnitudes directamente proporcionales

Recuerda que:

Dos magnitudes son **directamente proporcionales** cuando al multiplicar o dividir a la primera por un número, la segunda queda multiplicada o dividida por el mismo número.

Ejemplo:

- Si dos cajas contienen 12 bombones, diez cajas (iguales a las primeras) contendrán sesenta bombones.

$$2 \cdot \mathbf{6} = 12 \qquad 10 \cdot \mathbf{6} = 60$$

La **razón de proporcionalidad directa** *k* se obtiene mediante el cociente de cualquiera de los valores de una variable y los correspondientes de la otra:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = k$$

Ejemplo:

- En el ejemplo anterior la razón de proporcionalidad es: $\frac{12}{2} = \frac{60}{10} = 6$

Ejemplo:

- Calcula la razón de proporcionalidad, copia en tu cuaderno y completa la tabla de proporcionalidad directa siguiente:

Magnitud A	18	2,4	60	2,8	0,20
Magnitud B	4,5	0,6	15	0,7	0,05

La razón de proporcionalidad es *k* = $\frac{18}{4,5} = 4$. Por tanto todos los valores de la magnitud B son cuatro veces menores que los de la magnitud A.

1.2. Regla de tres simple directa

Recuerda que:

El cuarto término de una proporción directa entre dos magnitudes se puede calcular mediante el procedimiento denominado "*regla de tres*"

Ejemplo:

Quince paquetes pesan 330 kg, ¿cuántos kg pesan 6 paquetes?

15 paquetes —— 330 kg

6 paquetes —— *x* kg

$$\frac{15}{330} = \frac{6}{x} \Rightarrow x = \frac{330 \cdot 6}{15} = 132\ kg$$

1.3. Regla de tres compuesta directa

Una proporción en la que intervienen más de dos magnitudes se denomina **proporción compuesta**.
Para calcular el valor desconocido de una de sus magnitudes se utiliza la "*regla de tres compuesta*".

Ejemplo:

- Nueve personas han gastado en transporte 630 € en 20 días. ¿Cuánto gastarán 24 personas en 8 días realizando el mismo recorrido?

Observamos que las tres magnitudes son directamente proporcionales.

9 personas	630 €	20 días
24 personas	*x* €	8 días

$$\frac{630}{x} = \frac{20}{8} = \frac{9}{24} \Rightarrow x = \frac{630 \cdot 24 \cdot 8}{9 \cdot 20} = 672\ €$$

1.4. Porcentajes

El porcentaje o tanto por ciento es la razón de proporcionalidad de mayor uso en la vida cotidiana.

El **tanto por ciento** es una razón con denominador 100.

Ejemplo:

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

- 24 % = $\frac{24}{100}$

Los porcentajes son proporciones directas en las que se puede aplicar la regla de tres.

Ejemplo:

- La población de Robles era en 2012 de 5680 habitantes. En 2013 se ha incrementado en un 5 %. ¿Cuál es su población a final de 2013?

El 5 % de 5680 es $\frac{5 \cdot 5680}{100}$ = 284 habitantes. La población se ha incrementado en 284 habitantes, luego al final de 2013 será de: 5680 + 284 = 5964 habitantes.

Actividades propuestas

1. Estima cuántas personas caben de pie en un metro cuadrado. Ha habido una fiesta y se ha llenado completamente un local de 260 m^2, ¿cuántas personas estimas que han ido a esa fiesta?
2. En una receta nos dicen que para hacer una mermelada de fresa necesitamos un kilogramo de azúcar por cada dos kilogramos de fresas. Queremos hacer 5 kilogramos de mermelada, ¿cuántos kilogramos de azúcar y cuántos de fresas debemos poner?
3. La altura de un árbol es proporcional a su sombra (a una misma hora). Un árbol que mide 1,2 m tiene una sombra de 2,3 m. ¿Qué altura tendrá un árbol cuya sombra mida 4,2 m?

1.5. Incremento porcentual

Ejemplo:

- *El ejemplo anterior puede resolverse mediante* **incremento porcentual**: 100 + 5 = 105%
- El 105 % de 5680 es $\frac{105 \cdot 5680}{100}$ = 5964 habitantes

1.6. Descuento porcentual

- En las rebajas a todos los artículos a la venta les aplican un 20 % de descuento. Calcula el precio de los que aparecen en la tabla:

Precio sin descuento	74 €	105 €	22 €	48 €
Precio en rebajas	59,20 €	84 €	17,6 €	38,4 €

Ya que nos descuentan el 20 %, pagaremos el 80 %. Por tanto: $\frac{80}{100}$ = 0,8 es la razón directa de proporcionalidad que aplicaremos a los precios sin descuento para calcular el precio rebajado.

Actividades propuestas

4. Copia en tu cuaderno y completa la tabla de proporción directa. Calcula la razón de proporcionalidad.

Litros	16	4,5		1		50
Euros	36		8,10		10	

5. Hemos gastado 72 litros de gasolina para recorrer 960 km. ¿Cuántos litros necesitaremos para una distancia de 1500 km?
6. Mi coche gasta 6 litros de gasolina cada 100 km, ¿cuántos litros gastará en un viaje de 1250 km?
7. Un libro de 420 páginas pesa 200 g. ¿Cuánto pesará un libro de la misma colección de 300 páginas?
8. Seis personas realizan un viaje de ocho días y pagan en total 40800 €. ¿Cuánto pagarán 15 personas si su viaje dura 5 días?
9. Calcula el precio final de un lavavajillas que costaba 430 € más un 21 % de IVA, al que se le ha aplicado un descuento sobre el coste total del 15 %.
10. Calcula los términos que faltan para completar las proporciones: a) $\frac{24}{100} = \frac{30}{x}$ b) $\frac{x}{80} = \frac{46}{12}$ c) $\frac{3'6}{12'8} = \frac{x}{60}$
11. Dos pantalones nos costaron 32 €, ¿cuánto pagaremos por 5 pantalones?
12. Copia en tu cuaderno y completa:
    a) De una factura de 127 € he pagado 111 €. Me han aplicado un ……… % de descuento
    b) Me han descontado el 12 % de una factura de ……………. € y he pagado 365 €.
    c) Por pagar al contado un mueble me han descontado el 15 % y me he ahorrado 100 €. ¿Cuál era el precio del mueble sin descuento?

1.7. Escalas

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

En planos y mapas encontramos anotadas en su parte inferior la escala a la que están dibujados.

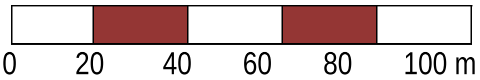
La **escala** es la proporción entre las medidas del dibujo y las medidas en la realidad.

Ejemplo:

- Si una cierta escala se expresa de la forma 1:20000 significa que 1 cm del plano corresponde a 20000 cm = 200 m en la realidad.

Las escalas también se representan en forma gráfica, mediante una barra dividida en segmentos de 1 cm de longitud

Ejemplo:



Esta escala identifica cada centímetro del mapa con 20 m en la realidad es decir 1:2000.

Un instrumento sencillo para realizar trabajos a escala es el ***pantógrafo*** que facilita copiar una imagen o reproducirla a escala.

El pantógrafo es un paralelogramo articulado que, al variar la distancia entre los puntos de articulación, permite obtener diferentes tamaños de dibujo sobre un modelo dado.

Actividades propuestas

13. La distancia real entre dos pueblos es 18,5 km. Si en el mapa están a 10 cm de distancia. ¿A qué escala está dibujado?
14. ¿Qué altura tiene un edificio si su maqueta construida a escala 1 : 300 presenta una altura de 12 cm?
15. Dibuja la escala gráfica correspondiente a la escala 1 : 60000.
16. Las dimensiones de una superficie rectangular en el plano son 6 cm y 14 cm. Si está dibujado a escala 1 : 40, calcula sus medidas reales.

2. PROPORCIONALIDAD INVERSA

2.1. Magnitudes inversamente proporcionales

Recuerda que:

Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** cuando al multiplicar o dividir a la primera por un número, la segunda queda dividida o multiplicada por el mismo número.

Ejemplo:

- Cuando un automóvil va a 90 km/h, tarda cuatro horas en llegar a su destino. Si fuera a 120 km/h tardaría 3 horas en hacer el mismo recorrido: $90 \cdot 4 = 120 \cdot 3$

La velocidad y el tiempo son magnitudes inversamente proporcionales.

La **razón de proporcionalidad inversa** k' es el producto de cada par de magnitudes: $k' = a \cdot b = a' \cdot b'$

Ejemplo:

- Copia la tabla en tu cuaderno, calcula la razón de proporcionalidad inversa y completa la tabla de proporcionalidad inversa:

a	18	150	1,5	3600	100
b	50	6	600	0,25	9

$k' = 18 \cdot 50 = 900$. Comprueba que todas las columnas dan este resultado.

2.2. Regla de tres simple inversa

Para calcular el cuarto término entre dos magnitudes inversamente proporcionales aplicamos la regla de tres inversa.

Ejemplo:

- Cuatro personas realizan un trabajo en 18 días. ¿Cuántas personas necesitaremos para realizar el mismo trabajo en 8 días?

4 personas ——— 18 días
x personas ——— 8 días

$$k' = 4 \cdot 18 = 8 \cdot x \Rightarrow x = \frac{4 \cdot 18}{8} = 9 \text{ personas.}$$

2.3. Regla de tres compuesta inversa

En la regla de tres compuesta inversa, intervienen varias magnitudes inversamente proporcionales entre sí.

Ejemplo:

- Con una cantidad de pienso podemos dar de comer a 48 animales durante 30 días con una ración de 1,2 kg para cada uno. ¿Cuántos días podremos alimentar a 60 animales si la ración es de 800 g?

48 animales ——— 30 días ——— 1,2 kg
60 animales ——— *x* días ——— 0,800 kg

Las tres magnitudes son inversamente proporcionales entre sí. Por tanto $k´= 48·30·1,2 = 1728 \Rightarrow x = \frac{48 \cdot 30 \cdot 1,2}{60 \cdot 0,800} = 36$ días

Actividades propuestas

17. Copia en tu cuaderno la tabla siguiente, calcula la razón de proporcionalidad y completa la tabla de proporcionalidad inversa:

Magnitud A	36	0,09		12	
Magnitud B	0,25		6		72

18. Al cortar una cantidad de madera hemos conseguido 6 paneles de 2,25 m de largo. ¿Cuántos paneles conseguiremos si ahora tienen 1,5 m de largo?
19. Para llenar un depósito se abren tres grifos que lanzan 2 litros por minuto cada uno y tardan 6 horas. ¿Cuánto tiempo tardarán 4 grifos similares que lanzan 5 litros por minuto cada uno?
20. Tres máquinas fabrican 1200 piezas funcionando 5 horas diarias. ¿Cuántas máquinas se deben poner a funcionar para conseguir 6000 piezas durante 9 horas diarias?
21. En la construcción de un puente de 900 m se han utilizado 250 vigas, pero el ingeniero no está muy seguro y decide reforzar la obra añadiendo 75 vigas más. Si las vigas se colocan uniformemente a lo largo de todo el puente, ¿a qué distancia se colocarán las vigas?
22. En un huerto ecológico se utilizan 3000 kg de un tipo de abono de origen animal que se sabe que tiene un 10 % de nitratos. Se cambia el tipo de abono, que ahora tiene un 15 % de nitratos, ¿cuántos kilogramos se necesitarán del nuevo abono para que las plantas reciban la misma cantidad de nitratos?
23. Ese mismo huerto necesita 1200 cajas para envasar sus mandarinas en cajas de un kilogramo. ¿Cuántas cajas necesitaría para envasarlas en cajas de medio kilogramo? ¿Y para envasarlas en cajas de 2 kilogramos?

3. REPARTOS PROPORCIONALES

Cuando se realiza un reparto en partes desiguales se debe establecer previamente si se trata de un reparto proporcional directo o inverso.

3.1. Reparto proporcional directo

En un reparto proporcional directo le corresponderá más a quien más partes tiene.

Actividad resuelta

- Tres amigos deben repartirse los 300 € que han ganado en una competición de acuerdo a los puntos que cada uno ha obtenido. El primero obtuvo 7 puntos, el segundo 5 y el tercero 3 puntos.
  El reparto directamente proporcional se inicia sumando los puntos: 7 + 5 + 3 = 15 puntos.
  Calculamos el premio por punto: 300 : 15 = 20 €. El primero obtendrá 20 · 7 = 140 €. El segundo: 20 · 5 = 100 €. El tercero: 20 · 3 = 60 €. La suma de las tres cantidades es 300 €, la cantidad total a repartir.

Como se trata de una proporción, se debe establecer la siguiente regla:

Sea N (en el ejemplo anterior 300) la cantidad a repartir entre cuatro personas, a las que les corresponderá A, B, C, D de manera que N = A + B + C + D. Estas cantidades son proporcionales a su participación en el reparto: *a, b, c, d*.

a + b + c + d = n es el número total de partes en las que ha de distribuirse N.

N : *n* = *k* que es la cantidad que corresponde a cada parte. En el ejemplo anterior: *k* = 300 : 15 = 20.

El reparto finaliza multiplicando *k* por *a*, *b*, *c* y *d*, obteniéndose así las cantidades correspondientes A, B, C y D.

3.2. Reparto proporcional inverso

En un reparto proporcional inverso recibe más quien menos partes tiene.

Sea N la cantidad a repartir y *a*, *b* y *c* las partes. Al ser una proporción inversa, el reparto se realiza a sus inversos 1/*a*, 1/*b*, 1/*c*.

Para calcular las partes totales, reducimos las fracciones a común denominador, para tener un patrón común, y tomamos los numeradores que son las partes que corresponden a cada uno.

Actividad resuelta

- Repartir 3000 € de forma inversamente proporcional a 12 y 20.

Calculamos el total de las partes: 1/12 + 1/20 = 5/60 + 3/60 = 8/60.

3000 : 8 = 375 € cada parte. 375 · 5 = 1875 €. 375 · 3 = 1125 €.

Actividades propuestas

24. Cinco personas comparten lotería, con 10, 6, 12, 7 y 5 participaciones respectivamente. Si han obtenido un premio de 18000 € ¿Cuánto corresponde a cada uno?
25. En un concurso se acumula puntuación de forma inversamente proporcional al número de errores. Los cuatro finalistas, con 6, 5, 2, y 1 error, deben repartirse los 1400 puntos. ¿Cuántos puntos recibirá cada uno?

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

26. En el testamento, el abuelo establece que quiere repartir entre sus nietos 22200 €, de manera proporcional a sus edades, 12, 15 y 18 años, cuidando que la mayor cantidad sea para los nietos menores. ¿Cuánto recibirá cada uno?
27. Tres socios han invertido 20000 €, 34000 € y 51000 € este año en su empresa. Si los beneficios a repartir a final de año ascienden a 31500 €, ¿cuánto corresponde a cada uno?

3.3. Mezcla y aleaciones

Las **mezclas** que vamos a estudiar son el resultado final de combinar distintas cantidades de productos, de distintos precios.

Actividad resuelta

- Calcula el precio final del litro de aceite si mezclamos 12 litros a 2,85 €/l, 5 litros a 3,02 €/l y 3 litros a 3,10 €/l.
  Calculamos el coste total de los distintos aceites: 12 · 2,85 + 5 · 3,02 + 3 · 3,10 = 58,60 €. Y el número total de litros: 12 + 5 + 3 = 20 l. El precio del litro de mezcla valdrá 58,60 : 20 = 2,93 €/l.

Una **aleación** es una mezcla de metales para conseguir un determinado producto final con mejores propiedades o aspecto.

Las aleaciones se realizan en joyería mezclando metales preciosos, oro, plata, platino, con cobre o rodio. Según la proporción de metal precioso, se dice que una joya tiene más o menos **ley.**

La **ley** de una aleación es la relación entre el peso del metal más valioso y el peso total.

Ejemplo:

- Una joya de plata de 50 g de peso contiene 42 g de plata pura. ¿Cuál es su ley?

$$\text{Ley} = \frac{peso\ \ metal\ \ puro}{peso\ \ total} = \frac{42}{50} = 0{,}84$$

Otra forma de medir el grado de pureza de una joya es el **quilate.**

Un quilate de un metal precioso es 1/24 de la masa total de la aleación.

Para considerar una joya de oro puro ha de tener 24 quilates.

Ejemplo:

- Una joya de oro de 18 quilates pesa 44 g. ¿Qué cantidad de su peso es de oro puro?: Peso en oro $= \frac{44 \cdot 18}{24}$ = 33 g.

Actividades propuestas

28. Calcula el precio del kilo de mezcla de dos tipos de café: 3,5 kg a 4,8 €/kg y 5,20 kg a 6 €/kg.
29. ¿Cuántos litros de zumo de pomelo de 2,40 €/l deben mezclarse con 4 litros de zumo de naranja a 1,80 €/l para obtener una mezcla a 2,13 €/l?
30. Calcula la ley de una joya sabiendo que pesa 110 g y contiene 82 g de oro puro.
31. ¿Cuántos quilates, aproximadamente tiene la joya anterior?

4. INTERÉS

4.1. Interés simple

El **interés** es el beneficio que se obtiene al depositar un capital en una entidad financiera a un determinado tanto por ciento durante un tiempo.

En el **interés simple**, al capital *C* depositado se le aplica un tanto por ciento o rédito *r* anualmente.

El cálculo del interés obtenido al cabo de varios años se realiza mediante la fórmula: $I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$

Si el tiempo que se deposita el capital son meses o días, el interés se calcula dividiendo la expresión anterior entre 12 meses o 360 días (año comercial). $I = \frac{C \cdot r \cdot t}{1200}$ tiempo en meses $I = \frac{C \cdot r \cdot t}{36000}$ tiempo en días

4.2. Interés compuesto

Desde otro punto de vista, el interés es el porcentaje que se aplica a un préstamo a lo largo de un tiempo, incrementando su cuantía a la hora de devolverlo.

Este tipo de interés no se calcula como el interés simple sino que se establece lo que se llama "*capitalización*".

El **interés compuesto** se aplica tanto para calcular el capital final de una inversión, como la cantidad a devolver para amortizar un préstamo.

Normalmente los préstamos se devuelven mediante cuotas mensuales que se han calculado a partir de los intereses generados por el préstamo al tipo de interés convenido.

La capitalización compuesta plantea que, a medida que se van generando intereses, pasen a formar parte del capital inicial, y ese nuevo capital producirá intereses en los períodos sucesivos.

Si se trata de un depósito bancario, el capital final se calculará siguiendo el siguiente procedimiento:

C_i (capital inicial)	1 año	*i* (tanto por uno)	$C_f = C_i \cdot (1 + i)$

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

$C_i \cdot (1 + i)$	2 años	$C_i \cdot (1 + i) \cdot (1 + i)$	$C_f = C_i \cdot (1 + i)^2$
$C_i \cdot (1 + i)^2$	3 años	$C_i \cdot (1 + i)^2 \cdot (1 + i)$	$C_f = C_i \cdot (1 + i)^3$
…………..	……….	……………	…………….
	n años		$C_f = C_i \cdot (1 + i)^n$

Al cabo de *n* años, el capital final será $C_f = C_i \cdot \mathbf{(1 + i)}^n$.

Para hacer los cálculos puedes utilizar una "Hoja de cálculo". Basta que en la hoja de cálculo adjunta modifiques los datos de las casillas B5 donde está el "Capital inicial", casilla B6 donde está el "Tanto por uno" y de la casilla B7 donde aparece el número de "Años", y arrastres en la columna B hasta que el número final de años coincida con dicha casilla.

Actividades resueltas

- Depositamos 5400 € al 2,25 % anual. ¿Cuánto dinero tendremos al cabo de 28 meses?

Calculamos el interés simple: $I = \frac{5400 \cdot 2{,}25 \cdot 28}{1200} = 283{,}5$ €

Sumamos capital e intereses: 5400 + 283,5 = 5683,5 €

- El capital inicial de un depósito asciende a 82000 €. El tanto por ciento aplicado es el 3 % a interés compuesto durante 5 años. Calcula el capital final.: $C_f = C_i \cdot (1 + i)^n = 82000 \cdot (1 + 0{,}03)^5 = 82000 \cdot 1{,}159\ldots = 95060$ €

Actividades propuestas

32. Calcula el interés simple que producen 105000 € al 4,8 % durante 750 días.

33. Al 5 % de interés compuesto durante 12 años, ¿cuál será el capital final que obtendremos al depositar 39500 €? Ayuda: también puedes utilizar la hoja de cálculo.

34. ¿Qué capital hay que depositar al 1,80 % durante 6 años para obtener un interés simple de 777,6 €?

RESUMEN

		Ejemplos
Proporcionalidad directa	Dos magnitudes son **directamente** proporcionales cuando al multiplicar o dividir a la primera por un número, la segunda queda multiplicada o dividida por el mismo número. La **razón de proporcionalidad directa** *k* es el valor que se obtiene mediante el cociente de cualquiera de los valores de una variable y los correspondientes de la otra.	Para empapelar 300 m² hemos utilizado 24 rollos de papel, si ahora la superficie es de 104 m², necesitaremos 8,32 rollos, pues $k = 300/24 = 12{,}5$, y $12{,}5 = 104/x$, por lo que $x = 104/12{,}5 = 8{,}32$.
Proporcionalidad inversa	Dos magnitudes son **inversamente** proporcionales cuando al multiplicar o dividir a la primera por un número, la segunda queda dividida o multiplicada por el mismo número. La **razón de proporcionalidad inversa** *k´* es el producto de cada par de magnitudes: $k' = a \cdot b = a' \cdot b'$	Dos personas pintan una vivienda en 4 días trabajando 9 h diarias. Para pintar la misma vivienda, 3 personas, trabajando 8 h diarias tardarán… 3 días
Porcentajes	Razón con denominador 100.	El 87 % de 2400 es $\frac{87 \cdot 2400}{100} = 2088$
Escalas	La escala es la proporción entre las medidas del dibujo y las medidas en la realidad.	A escala 1:50000, 35 cm son 17,5 km en la realidad.
Reparto proporcional directo	Recibe más cantidad quien más partes tiene.	Repartir directamente a 6,10 y 14, 105000 € 6 + 10 + 14 = 30 105000 : 30 = 3500 6 · 3500 = 21000 € 10 ·3500 = 35000 € 14 · 3500 = 49000 €
Reparto proporcional inverso	Recibe más cantidad quien menos partes tiene.	Repartir 5670 inversamente a 3,5 y 6; $1/3 + 1/5 + 1/6 = \frac{10+6+5}{30} = \frac{21}{30}$ 5670 : 21 = 270 270 · 10 = 2700; 270 · 6 = 1620 270 · 5 = 1350
Mezclas y aleaciones	Mezclar distintas cantidades de productos, de distintos precios. La **ley** de una **aleación** es la relación entre el peso del metal más valioso y el peso total.	Una joya que pesa 245 g y contiene 195 g de plata, su ley es: $\frac{195}{245} = 0{,}795$
Interés simple y compuesto	El interés es el beneficio que se obtiene al depositar un capital en una entidad financiera a un determinado tanto por ciento durante un tiempo	C = 3600; r = 4,3 %; t = 8 años $I = \frac{3600 \cdot 4{,}3 \cdot 8}{100} = 1238{,}4$ €

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

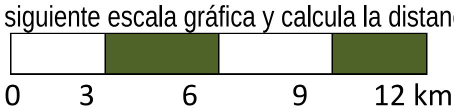
1. Copia en tu cuaderno, calcula la razón de proporcionalidad y completa la tabla de proporcionalidad directa:

litros	6,25		0,75	1,4	
euros		15	2,25		4,5

2. Con 76 € hemos pagado 12,5 m de tela, ¿cuánto nos costarán 22,5 m?
3. Cada semana pagamos 82 € en transporte. ¿Cuánto gastaremos los meses de junio y julio?
4. Para tapizar cinco sillas he utilizado 2,3 m de tela, ¿cuántas sillas podré tapizar con la pieza completa de 23 m?
5. Un camión ha transportado en 3 viajes 220 sacos de patatas de 24 kg cada uno. ¿Cuántos viajes serán necesarios para transportar 550 sacos de 30 kg cada uno?
6. Una edición de 350 libros de 210 páginas cada uno alcanza un peso total de 70 kg. ¿Cuántos kg pesará otra edición de 630 libros de 140 páginas cada uno?
7. Sabiendo que la razón de proporcionalidad directa es $\frac{A}{B}$ = 1,8, copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla:

Magnitud A	12,6			4,14	
Magnitud B		9	0,1		2,7

8. El modelo de teléfono móvil que costaba 285 € + IVA está ahora con un 15 % de descuento. ¿Cuál es su precio rebajado? (IVA 21 %)
9. Por retrasarse dos meses en el pago de una deuda de 1520 €, una persona debe pagar un recargo del 12 %, ¿cuánto tiene que devolver en total?
10. ¿Qué tanto por ciento de descuento se ha aplicado en una factura de 1820 € si finalmente se pagaron 1274 €?
11. Al comprar un televisor he obtenido un 22 % de descuento, por lo que al final he pagado 483,60 €, ¿cuál era el precio del televisor sin descuento?
12. Por liquidar una deuda de 3500 € antes de lo previsto, una persona paga finalmente 3080 €, ¿qué porcentaje de su deuda se ha ahorrado?
13. El precio de un viaje se anuncia a 907,50 € IVA incluido. ¿Cuál era el precio sin IVA? (IVA 21 %)
14. ¿Qué incremento porcentual se ha efectuado sobre un artículo que antes valía 38 € y ahora se paga a 47,12 €?
15. Un mapa está dibujado a escala 1:700000. La distancia real entre dos ciudades es 21 km. ¿Cuál es su distancia en el mapa?
16. La distancia entre Oviedo y Coruña es de 340 km. Si en el mapa están a 10 cm, ¿cuál es la escala a la que está dibujado?
17. Interpreta la siguiente escala gráfica y calcula la distancia en la realidad para 21 cm.



18. Copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla:

Tamaño en el dibujo	Tamaño real	Escala
24 cm largo y 5 cm de ancho		1:25000
6 cm	15 km	
	450 m	1:30000

19. Copia en tu cuaderno, calcula la razón de proporcionalidad inversa y completa la tabla:

Magnitud A	4	7,5		3,6	
Magnitud B		12	0,18		10

20. ¿Qué velocidad debe llevar un automóvil para recorrer en 4 horas cierta distancia si a 80 km/h ha tardado 5 horas y 15 minutos?
21. La razón de proporcionalidad inversa entre A y B es 5,4. Copia en tu cuaderno y completa la tabla siguiente:

A	18		9		10,8
B		0,03		2,7	

22. En la granja se hace el pedido de forraje para alimentar a 240 vacas durante 9 semanas. Si vende 60 vacas, ¿cuántas semanas le durará el forraje? ¿Y si en lugar de vender, compra treinta vacas? ¿Y si decide rebajar la ración una cuarta parte con las 240 vacas?
23. Con doce paquetes de 3,5 kg cada uno pueden comer 80 gallinas diariamente. Si los paquetes fueran de 2 kg, ¿cuántos necesitaríamos para dar de comer a las mismas gallinas?
24. Determina si las dos magnitudes son directa o inversamente proporcionales y completa la tabla en tu cuaderno:

A	24	8	0,4	6		50
B	3	9	180		20	

25. Si la jornada laboral es de 8 horas necesitamos a 15 operarios para realizar un trabajo. Si rebajamos la jornada en media hora diaria, ¿cuántos operarios serán necesarios para realizar el mismo trabajo?
26. En un almacén se guardan reservas de comida para 80 personas durante 15 días con 3 raciones diarias, ¿cuántos días duraría la misma comida para 75 personas con 4 raciones diarias?
27. Diez operarios instalan 3600 m de valla en 6 días. ¿Cuántos días tardarán 12 operarios en instalar 5040 m de valla?
28. En un concurso el premio de 168000 € se reparte de forma directamente proporcional a los puntos conseguidos. Los tres finalistas consiguieron 120, 78 y 42 puntos. ¿Cuántos euros recibirán cada uno?
29. Repartir 336 en partes directamente proporcionales a 160, 140, 120.
30. Un trabajo se paga a 3120 €. Tres operarios lo realizan aportando el primero 22 jornadas, el segundo 16 jornadas y el tercero 14 jornadas. ¿Cuánto recibirá cada uno?
31. Repartir 4350 en partes inversamente proporcionales a 18, 30, 45.
32. Cinco personas comparten un microbús para realizar distintos trayectos. El coste total es de 157,5 € más 20 € de suplemento por servicio nocturno. Los kilómetros recorridos por cada pasajero fueron 3, 5, 7, 8 y 12 respectivamente. ¿Cuánto debe abonar cada uno?
33. Se ha decidido penalizar a las empresas que más contaminan. Para ello se reparten 2350000 € para subvencionar a tres empresas que presentan un 12 %, 9 % y 15 % de grado de contaminación. ¿Cuánto recibirá cada una?
34. Mezclamos 3 kg de almendras a 14 €/kg, 1,5 kg de nueces a 6 €/kg, 1,75 kg de anacardos a 18 €/kg. Calcula el precio final del paquete de 250 g de mezcla de frutos secos.
35. Calcula el precio del litro de zumo que se consigue mezclando 8 litros de zumo de piña a 2,5 €/l, 15 litros de zumo de naranja a 1,6 €/l y 5 litros de zumo de uva a 1,2 €/l. ¿A cuánto debe venderse una botella de litro y medio si se le aplica un aumento del 40 % sobre el precio de coste?
36. Para conseguir un tipo de pintura se mezclan tres productos 5 kg del producto X a 18 €/kg, 19 kg del producto Y a 4,2 €/kg y 12 kg del producto Z a 8 €/kg. Calcula el precio del kg de mezcla.
37. Un lingote de oro pesa 340 g y contiene 280,5 g de oro puro. ¿Cuál es su ley?
38. ¿Cuántos gramos de oro contiene una joya de 0,900 de ley, que se ha formado con una aleación de 60 g de 0,950 de ley y 20 g de 0,750 de ley?
39. ¿Qué capital hay que depositar al 3,5 % de rédito en 5 años para obtener un interés simple de 810 €?
40. ¿Cuál es el capital final que se recibirá por depositar 25400 € al 1,4 % en 10 años?
41. ¿Cuántos meses debe depositarse un capital de 74500 € al 3 % para obtener un interés de 2980 €?
42. Al 3 % de interés compuesto, un capital se ha convertido en 63338,5 €. ¿De qué capital se trata?

AUTOEVALUACIÓN

1. Los valores que completan la tabla de proporcionalidad directa son:

A	8	0,75		4,5	100
B		15	6		

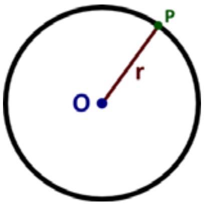
a) 160; 0,3; 90; 2000 b) 16, 3, 90, 200 c) 160, 3, 9, 20

2. Con 450 € pagamos los gastos de gas durante 8 meses. En 30 meses pagaremos:
   a) 1850 € b) 1875 € c) 1687,5 €
3. Un artículo que costaba 1600 € se ha rebajado a 1400 €. El porcentaje de rebaja aplicado es:
   a) 12,5 % b) 14 % c) 15,625 % d) 16,25 %
4. Para envasar 360 litros de agua, ¿cuántas botellas necesitaremos si queremos utilizar envases de tres cuartos de litro?
   a) 440 botellas b) 280 botellas c) 480 botellas d) 360 botellas
5. Tres agricultores se reparten los kilogramos de la cosecha de forma proporcional al tamaño de sus parcelas. La mayor, que mide 15 ha recibe 24 toneladas, la segunda es de 10 ha y la tercera de 8 ha recibirán:
   a) 16 t y 5 t b) 12,8 t y 16 t c) 16 t y 12,8 t d) 16 t y 11 t
6. La escala a la que se ha dibujado un mapa en el que 3,4 cm equivalen a 1,02 km es:
   a) 1:34000 b) 1:3000 c) 1:30000 d) 1:300
7. Con 4 rollos de papel de 5 m de largo, puedo forrar 32 libros. ¿Cuántos rollos necesitaremos para forrar 16 libros si ahora los rollos de papel son de 2 m de largo?
   a) 3 rollos b) 5 rollos c) 4 rollos d) 2 rollos
8. El precio final del kg de mezcla de 5 kg de harina clase A, a 1,2 €/kg, 2,8 kg clase B a 0,85 €/kg y 4 kg clase C a 1 €/kg es:
   a) 1,12€ b) 0,98 € c) 1,03€ d) 1,05€
9. La ley de una aleación es 0,855. Si el peso de la joya es 304 g, la cantidad de metal precioso es:
   a) 259,92 g b) 255,4 g c) 248,9 g d)306 g
10. A 2 % de interés compuesto, durante 6 años, 14500 € se habrán convertido en:
   a) 16225,35 € b) 16329,35 € c) 15632,35 € d) 14550 €

CAPÍTULO 7: GEOMETRÍA EN EL PLANO.
Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas: 3º B de ESO

1. LUGARES GEOMÉTRICOS

Muchas veces definimos una figura geométrica como los puntos del plano que cumplen una determinada condición. Decimos entonces que es un *lugar geométrico del plano*.



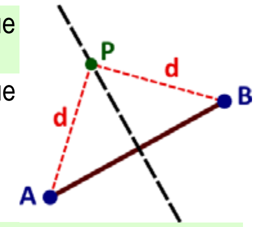
1.1. La circunferencia

La **circunferencia** es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a un punto del mismo (el centro) es un valor determinado (el radio).

Todos los puntos de la circunferencia tienen una distancia igual al radio (*r*) del centro (*O*).

1.2. Mediatriz de un segmento

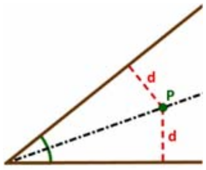
La **mediatriz** de un segmento es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los extremos del mismo.



Un punto *P* de la mediatriz verifica que está a la misma distancia de *A* que de *B*. Cualquier otro punto que lo cumpla pertenece a la mediatriz.

La mediatriz es una recta perpendicular al segmento y pasa por el punto medio del mismo.

1.3. Bisectriz de un ángulo



Dado un ángulo delimitado por dos rectas, la **bisectriz** del ángulo es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de las mismas.

Un punto *P* de la bisectriz verifica que está a la misma distancia de las dos rectas que forman el ángulo. Cualquier otro punto que lo cumpla pertenece a la bisectriz.

La bisectriz pasa por el vértice del ángulo y divide a éste en dos ángulos iguales.

Actividades propuestas

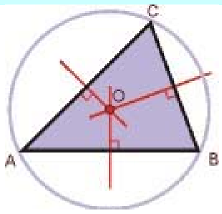
1. Un agricultor encuentra en su campo una bomba de la Guerra Civil. Las autoridades establecen una distancia de seguridad de 50 metros. ¿Cómo se debe acordonar la zona?
2. Un juego de dos participantes consiste en que se sitúan a una distancia de dos metros entre sí y se ponen varias banderas a la misma distancia de ambos. La primera a 5 metros, la segunda a 10 metros, la tercera a 15 y así sucesivamente. ¿Sobre qué línea imaginaria estarían situadas las banderas?
3. Cuando en una acampada se sientan alrededor del fuego lo hacen formando un círculo. ¿Por qué?
4. Utiliza regla y compás para dibujar la bisectriz de un ángulo y la mediatriz de un segmento.

1.4. Rectas y puntos notables de un triángulo

Recuerda que:

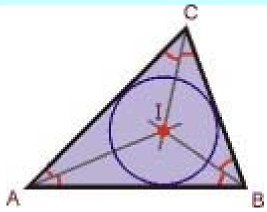
En cualquier triángulo podemos encontrar sus mediatrices, bisectrices, alturas y medianas.

Mediatrices. Circuncentro.



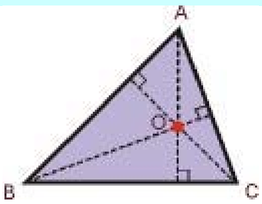
Las mediatrices se cortan en el circuncentro.
El circuncentro está a la misma distancia de los tres vértices. Es el centro de la circunferencia circunscrita.

Bisectrices. Incentro.



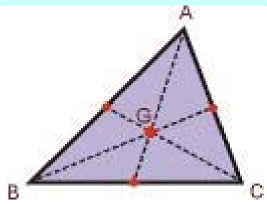
Las bisectrices se cortan en el Incentro.
El incentro está a la misma distancia de los tres lados. Es el centro de la circunferencia inscrita.

Alturas. Ortocentro.



Las alturas son las perpendiculares a un lado trazadas desde el vértice opuesto. Se cortan en el ortocentro.

Medianas. Baricentro.



Las medianas son las rectas que pasan por un vértice y por el punto medio del lado opuesto. Dividen al triángulo en dos triángulos de igual área. Se cortan en el baricentro. La distancia del mismo a cada lado es el doble de su distancia al vértice opuesto correspondiente.

Si la **mediatriz** de un segmento es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos del segmento, cada mediatriz de un triángulo equidistará de dos de los vértices del triángulo y es la mediatriz de uno de sus lados. Las tres mediatrices se cortan en un punto, el **circuncentro**, que, por tanto, distará lo mismo de cada uno de los tres vértices del triángulo, y es el centro de una circunferencia circunscrita al triángulo, que pasa por sus tres vértices.

Si la bisectriz de un ángulo equidista de los lados del ángulo, ahora cada una de las tres bisectrices de un triángulo equidistará de dos de los lados del triángulo. Las tres bisectrices se cortan en un punto, el **incentro**, que, por tanto, equidista de los tres lados del triángulo y es el centro de la circunferencia inscrita al triángulo.

En cualquier triángulo el circuncentro, ortocentro y baricentro están sobre una misma línea recta, a la que se denomina *Recta de Euler*. Esta recta contiene otros puntos notables. El incentro está en dicha recta sólo si el triángulo es isósceles.

Actividades propuestas

5. Dibuja en tu cuaderno un triángulo de lados 7, 6 y 4 cm. Traza en él las circunferencias inscritas y circunscritas.
6. Dibuja en tu cuaderno un triángulo de lado 8 cm y ángulos adyacentes al mismo de 40º y 30º. Encuentra su ortocentro y su baricentro.
7. Dibuja en tu cuaderno un triángulo con un ángulo de 40º comprendido entre dos lados de 6 y 4 cm. Obtén su circuncentro y su incentro.
8. ¿Qué pasa con las rectas y los puntos notables en un triángulo equilátero?
9. Dibuja un triángulo isósceles con el ángulo desigual de 40º. Traza las rectas notables para el lado desigual y para uno de los lados iguales. ¿Qué pasa?
10. Queremos situar una farola en una plaza triangular. ¿Dónde la pondríamos?
11. Una hormiga anda por una mediana de un triángulo partiendo del vértice. Cuando llega al baricentro ha recorrido 8 centímetros. ¿Qué distancia le falta para llegar al punto medio del lado opuesto al vértice de donde partió?
12. Tenemos un campo triangular sin vallar y queremos atar una cabra de forma que no salga del campo pero que acceda al máximo de pasto posible. ¿Dónde pondríamos el poste?
13. A Yaiza y a su hermano Aitor les encanta la tarta. Su madre les ha hecho una triangular. Yaiza la tiene que cortar pero Aitor elegirá primero su pedazo. ¿Cómo debería cortar Yaiza la tarta?
14. El ortocentro de un triángulo rectángulo, ¿dónde está?
15. Comprueba que el circuncentro de un triángulo rectángulo está siempre en el punto medio de la hipotenusa.
16. El baricentro es el centro de gravedad. Construye un triángulo de cartulina y dibuja su baricentro. Si pones el triángulo horizontalmente en el aire sólo sujetado por la punta de un lápiz en el baricentro comprobarás que se sujeta.
17. Calcula el lado de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de 10 cm de radio. [*Ayuda*: Aplica que en este caso el circuncentro coincide con el baricentro y que éste último está al doble de distancia del vértice que del lado opuesto.]

1.5. Uso de *Geogebra* para el estudio de los puntos y rectas notables de un triángulo

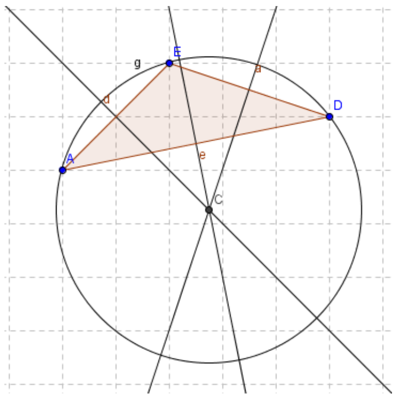
Se utiliza el programa *Geogebra* para determinar el *circuncentro*, el *incentro* y el *baricentro* de un triángulo, estudiar sus propiedades y dibujar la *recta de Euler*.

Actividades resueltas

Una vez abierto el programa en la opción del menú **Visualiza**, oculta **Ejes** y activa **Cuadrícula.**

Circuncentro:

Dibuja las tres mediatrices de un triángulo y determina su circuncentro.

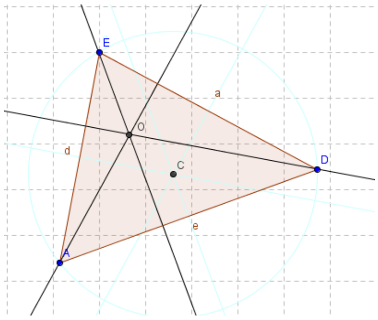


- Define tres puntos *A*, *D* y *E*, observa que el programa los define como *A*, *B* y *C*, utiliza el botón derecho del ratón y la opción **Renombra** para cambiar el nombre.
- Con la herramienta **Polígono** activada dibuja el triángulo que tiene por vértices estos puntos. Observa que cada lado tiene la misma letra que el ángulo opuesto con minúscula.
- Con la herramienta **Mediatriz** dibuja las mediatrices de dos lados, los segmentos *a* y *d*.
- Determina con **Intersección de dos objetos** el punto común de estas rectas y con **Renombra** llámalo *C*. Dicho punto es el *circuncentro* del triángulo.
- Dibuja la **Mediatriz** del segmento *e* y observa que pasa por el punto *C*.
- Activa **circunferencia por centro y punto que cruza** para dibujar la circunferencia circunscrita al triángulo.
- Utiliza el **Puntero** para desplazar los vértices *A*, *D* o *E* y comprobar que la circunferencia permanece circunscrita al triángulo.

Autor: Pedro Luis Suberviola
Revisor: Alberto de la Torre
Ilustraciones: Banco de imágenes INTEF y Pedro Luis Suberviola

Ortocentro:

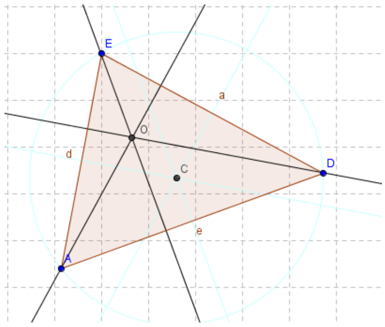
Dibuja las tres alturas de un triángulo y determina su ortocentro.



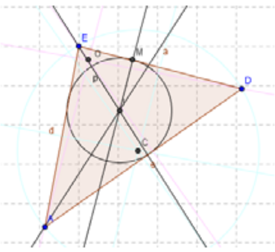
- En el mismo triángulo cambia el color de las mediatrices y la circunferencia situándote con el ratón sobre el trazo o sobre su ecuación y con el botón derecho elige en **Propiedades, Color** un azul muy próximo al blanco.
- Dibuja dos alturas con la herramienta **Recta Perpendicular**. Observa que el programa te pide que el punto por el que vas a trazarla y la recta o el segmento respecto al que es perpendicular.
- Determina con **Intersección de dos objetos** el *ortocentro* como el punto de corte de las dos alturas y con **Renombra** denomínalo *O*.
- Dibuja la tercera altura y comprueba que pasa por el *ortocentro*, desplazando con el **Puntero** los vértices del triángulo.

Incentro:

Dibuja las tres bisectrices de un triángulo y determina su incentro.



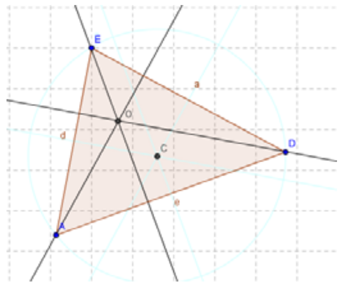
- Cambia el color de las alturas como en la construcción anterior, ahora con color rosa pálido.
- Con la herramienta **Bisectriz** dibuja dos bisectrices. Observa que para determinar la bisectriz de un ángulo es suficiente señalar tres puntos que pueden ser los vértices del triángulo en el orden adecuado.
- Determina el *incentro* con **Intersección de dos objetos** como el punto de corte de las dos bisectrices y con **Renombra** denomínalo *I*.
- Dibuja la tercera bisectriz y comprueba que siempre pasa por el *incentro*, desplazando con el **Puntero** los vértices del triángulo.



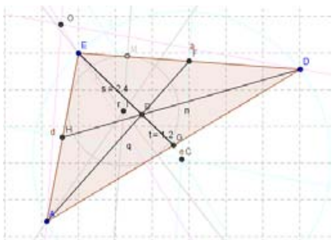
- Traza desde el punto *I* una **Recta perpendicular** a uno de los lados y con **Intersección de dos objetos** calcula el punto de corte entre esta recta y el lado del triángulo y con **Renombra** llámalo *M*.
- Activa **Circunferencia por centro y punto que cruza** para dibujar con centro en *I* y radio el segmento *IM* la circunferencia inscrita al triángulo.
- Desplaza con el **puntero** los vértices del triángulo para comprobar que la circunferencia permanece inscrita al triángulo.

Baricentro:

Dibuja las tres medianas de un triángulo y determina su baricentro.



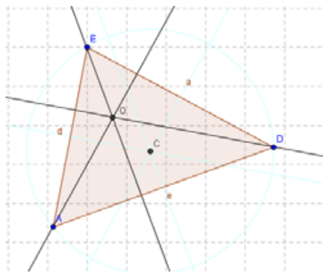
- Cambia el color de las bisectrices, del punto *M* y de la circunferencia inscrita, con gris muy pálido, como en las construcciones anteriores.
- Con la herramienta **Punto medio o centro** calcula los puntos medios de dos lados. Si el programa nombra alguno con la letra *B*, utiliza **Renombra** para llamarlo *H*.
- Con la herramienta **Segmento entre dos puntos** dibuja dos medianas y con **Intersección de dos objetos**, su punto de corte, el **baricentro**, que llamarás *B*.

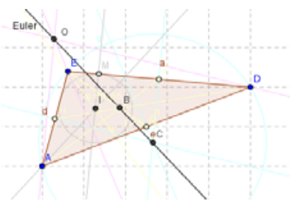


- Traza la tercera mediana y verifica que el baricentro pertenece a este segmento desplazando con el **Puntero** los vértices del triángulo.
- Activa **Segmento entre dos puntos** y determina los dos segmentos determinados por el baricentro en una de las medianas.
- Activa **Distancia** para medir estos segmentos.
- Desplaza los vértices del triángulo con el **Puntero** y observa la relación que existe entre las medidas realizadas.

Recta de Euler

Dibuja la recta que pasa por el circuncentro y el ortocentro.





- Cambia el color de las medianas, de los puntos medios de los lados y de los dos segmentos de la mediana, con amarillo muy pálido.
- Con la herramienta **Recta que pasa por dos puntos** dibuja la recta de Euler que pasa por el *circuncentro* y el *ortocentro* y utiliza **Renombra** para llamarla *Euler*. Comprueba que el baricentro pertenece a la recta de Euler y que el incentro no siempre pertenece.

Actividades propuestas

18. Repite las actividades resueltas. Modifica a tu gusto colores y líneas.

19. Mueve uno de los vértices originales del triángulo e indica qué cosas permanecen invariantes.

20. Comprueba que se verifican las propiedades de *circuncentro*, como centro de la circunferencia circunscrita, del *incentro*, como centro de la circunferencia inscrita.

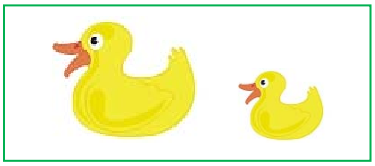
21. En *baricentro* divide a la mediana en dos parte, siendo una dos tercios de la otra. Compruébalo.

22. La recta de *Euler* pasa por el *circuncentro*, el *baricentro* y el *ortocentro*, y qué el *incentro* no siempre pertenece a la recta de *Euler*. ¿Cómo debe ser el triángulo para que pertenezca?

23. Mueve los vértices del triángulo para determinar si es posible que sus cuatro puntos notables coincidan.

2. SEMEJANZA

2.1. Figuras semejantes



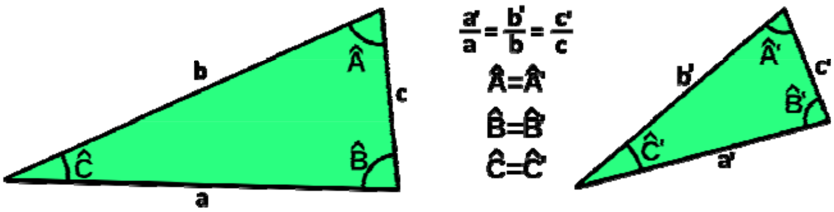
Dos figuras semejantes tienen *la misma forma*. Es muy útil saber reconocer la semejanza para poder estudiar una figura e inferir así propiedades de una figura semejante a ella que es más grande o inaccesible. La semejanza conserva los ángulos y mantiene la proporción entre las distancias.

Dos polígonos son semejantes si sus lados son proporcionales y sus ángulos son iguales.

2.2. Triángulos semejantes. Criterios de semejanza.

Dos triángulos son **semejantes** tienen todos los ángulos iguales y los lados proporcionales.

Para reconocer dos triángulos semejantes no es necesario conocer todos los lados y ángulos, es suficiente con que se cumpla



alguno de los siguientes **criterios de semejanza.**

Dos triángulos son semejantes sí:

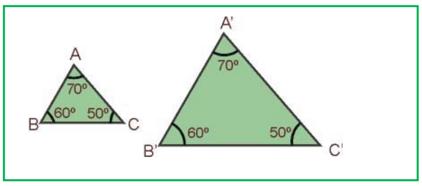
Primero: Tienen dos ángulos iguales.

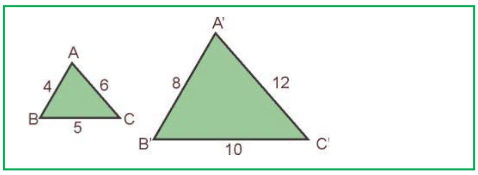
Segundo: Tienen los tres lados proporcionales.

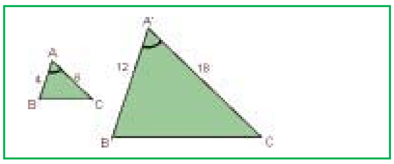
Tercero: Tienen dos lados proporcionales y el ángulo que forman es igual.

La demostración se basa en los criterios de igualdad de triángulos. Ya sabes que dos triángulos son iguales si tienen sus tres lados iguales y sus tres ángulos iguales, pero no es necesario que se verifiquen esas seis igualdades para que lo sean. Basta por ejemplo que tengan un lado y dos ángulos iguales. Así, se puede construir un triángulo igual a uno de los dados en posición *Tales* con el segundo y deducir la semejanza.

Ejemplo







Actividades propuestas

24. Indica si son semejantes los siguientes pares de triángulos:

a) Un ángulo de 80º y otro de 40º. Un ángulo de 80º y otro de 60º.

b) Triángulo isósceles con ángulo desigual de 70º. Triángulo isósceles con ángulo igual de 50º.

c) A = 30º, b = 7 cm, c = 9 cm. A'= 30º, b' = 3.5 cm, c' = 4.5 cm

d) a = 4 cm, b = 5 cm, c = 7 cm. a' = 10 cm, b' = 12.5 cm, c' = 24.5 cm

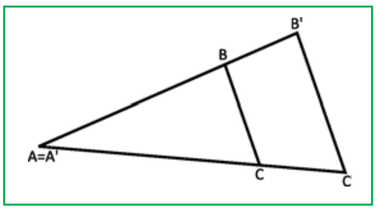
25. Calcula el valor desconocido para que los triángulos sean semejantes:

a) a = 9 cm, b = 6 cm, c = 12 cm. a' = 6 cm, b' = 4 cm, ¿c'?

b) A = 45º, b = 8 cm, c = 4 cm. A' = 45º, b' = 8 cm, ¿a'?

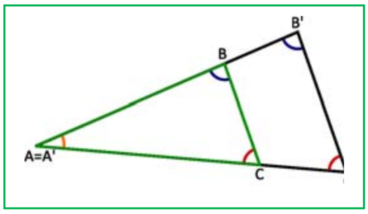
26. Un triángulo tiene lados de 6 cm, 7 cm y 7 cm. Un triángulo semejante a él tiene un perímetro de 60 cm. ¿Cuánto miden sus lados?

2.3. Triángulos en posición de Tales



Decimos que dos triángulos están en posición de Tales cuando dos de los lados de cada uno están sobre las mismas rectas y los otros lados son paralelos.

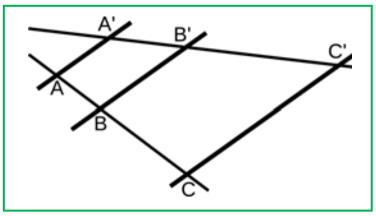
Autor: Pedro Luis Suberviola
Revisor: Alberto de la Torre
Ilustraciones: Banco de imágenes INTEF y Pedro Luis Suberviola



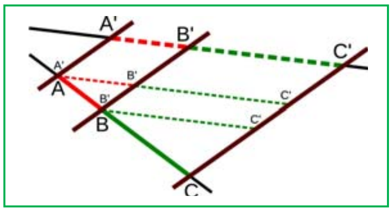
Los ángulos son iguales. Uno porque es el mismo. Los otros por estar formados por rectas paralelas. Por lo tanto, por el primer criterio de semejanza de triángulos, los lados son proporcionales y se cumple:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{A'C'}{AC}$$

2.4. Teorema de Tales



El teorema de Tales establece una relación entre los segmentos formados cuando dos rectas cualesquiera son cortadas por varias rectas paralelas.



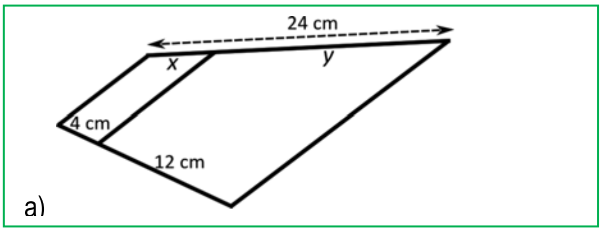
En la segunda figura se puede apreciar cómo se forman en este caso tres triángulos semejantes y que por lo tanto se establece que:

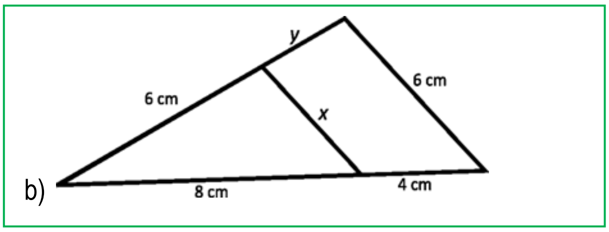
$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{A'C'}{AC}$$

Observación: En este caso no relacionamos los segmentos *AA'*, *BB'* y *CC'* que se forman sobre los lados paralelos.

Actividades propuestas

27. Calcula los valores de *x* e *y* en las siguientes figuras.

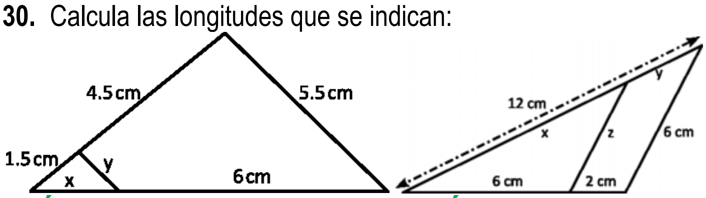




28. Un poste muy alto se sujeta con cables de acero que van de su extremo superior al suelo. La distancia del anclaje de uno de los cables a la base del poste es 6 metros. Ponemos una barra de 120 centímetros de forma que está perpendicular al suelo y justo toca el suelo y el cable. Su distancia al anclaje del cable es 90 centímetros. Calcula la longitud del poste y la longitud del cable de acero.

29. María mide 160 cm. Su sombra mide 90 cm. En ese mismo instante se mide la sombra de un edificio y mide 7,2 m. ¿Cuánto mide el edificio?

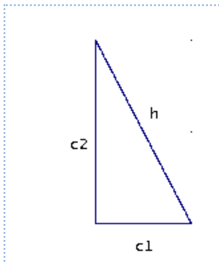
30. Calcula las longitudes que se indican:



3. ÁNGULOS, LONGITUDES Y ÁREAS

3.1. Teorema de Pitágoras

Teorema de Pitágoras



En un triángulo rectángulo, la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos: $h^2 = c_1^2 + c_2^2$

Utilizando el teorema de Pitágoras podemos obtener el valor de la hipotenusa de un triángulo rectángulo si conocemos lo que miden los catetos: $h=\sqrt{c_1^2+c_2^2}$, o también podemos obtener el valor de un cateto a partir de los valores de la hipotenusa y del otro cateto: $c_2=\sqrt{h^2-c_1^2}$

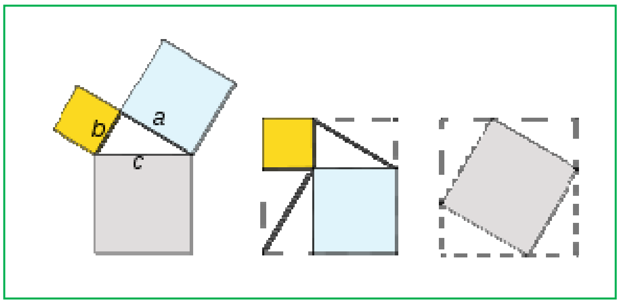
Ejemplo:

- *Si los catetos de un triángulo rectángulo miden 10 cm y 24 cm, su hipotenusa vale 26 cm, ya que:*

$$h=\sqrt{10^2+24^2}=\sqrt{100+576}=\sqrt{676}=26 \ cm.$$

Interpretación del teorema de Pitágoras

Si dibujamos un cuadrado de lado la hipotenusa *h* de un triángulo rectángulo, su área es h^2 (ver el primer ejemplo de 1.1). Si dibujamos dos cuadrados de lados los catetos c_1 y c_2 de ese triángulo rectángulo, sus áreas son c_1^2, c_2^2. Entonces el teorema de Pitágoras dice que el área del primer cuadrado (cuadrado gris de la figura de la izquierda) es igual a la suma de las áreas de los otros dos (cuadrados azul claro y amarillo de la figura de la izquierda).



Existen más de 367 demostraciones diferentes del Teorema de Pitágoras.

Una comprobación gráfica consiste en dibujar dos cuadrados iguales de lado la suma de los catetos *a* y *b* (figuras del centro y de la derecha). En uno se dibujan los cuadrados de lado *a* y *b*, en amarillo y azul en el dibujo. En el otro el cuadrado de lado la hipotenusa (en gris en el dibujo). Observa que quitando 4 triángulos iguales al de partida nos queda que el cuadrado gris es igual a la suma de los cuadrados amarillo y azul.

Por tanto: $a^2 + b^2 = c^2$

Actividades propuestas

31. ¿Es posible encontrar un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 5 y 12 *cm* y su hipotenusa 24 *cm*? Si tu respuesta es negativa, halla la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 5 y 12 *cm*. Utiliza calculadora para resolver esta actividad si te resulta necesaria.

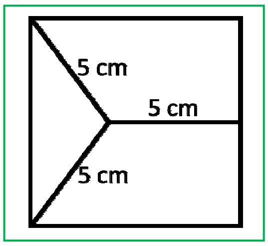
32. Calcula la longitud de la hipotenusa de los siguientes triángulos rectángulos de catetos:

a) 6 *cm* y 8 *cm* b) 4 *m* y 3 *m* c) 8 *dm* y 15 dm d) 13,6 *km* y 21,4 *km*.

33. Calcula la longitud del cateto que falta en los siguientes triángulos rectángulos de hipotenusa y cateto:

a) 26 *cm* y 10 *cm* b) 17 *m* y 8 *m* c) 37 *dm* y 35 *dm* d) 14,7 *km* y 5,9 *km*

34. Calcula el lado del cuadrado de la figura del margen:



35. Calcula el área de un triángulo equilátero de lado 9 *m*.

36. Calcula el área de un hexágono regular de lado 2 *cm*.

37. Calcula el volumen de un tetraedro regular de lado 7 *dm*.

38. Calcula la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 3 *m*.

39. Calcula la longitud de la diagonal de un rectángulo de base 15 *cm* y altura 8 *cm*.

40. Una portería de fútbol mide 7,32 m de alto por 2,44 m de ancho. El punto de penalti está a 10 metros. Calcula la distancia que recorre el balón en:

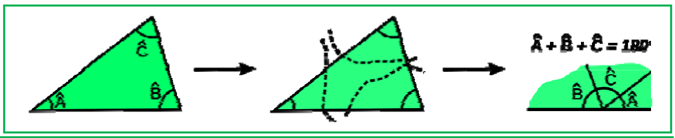
a) Un tiro directo a la base del poste.

b) Un tiro directo a la escuadra.

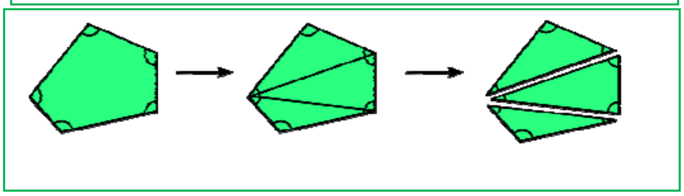
41. Demuestra que el diámetro de un cuadrado de lado *x* es $d = \sqrt{2}x$.

42. Demuestra que la altura de un triángulo equilátero de lado *x* es $d = \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

3.2. Suma de ángulos de un polígono



La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º · *n*.



La suma de los ángulos interiores de un polígono de *n* lados es $(n - 2)\cdot 180º$.

Para comprobarlo basta con trazar las diagonales de un polígono desde un vértice y lo habremos dividido en triángulos.

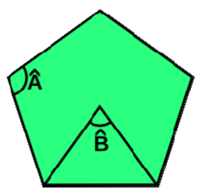
Por lo tanto:

Polígono	**Suma de ángulos**	**Polígono**	**Suma de ángulos**
Triángulo	180º	Cuadrilátero	180º · 2 = 360º
Pentágono	180º · 3 = 540º	Hexágono	180º · 4 = 720º

Si el polígono de *n* lados es regular, todos los ángulos interiores son iguales y para calcular el valor de su ángulo interior se divide entre *n* la suma de los ángulos interiores.

Ejemplo:

- *En un pentágono la suma de los ángulos centrales es* 180 · 3 = 540º.



Por lo tanto el **ángulo interior:** $\hat{B} = \frac{540º}{5} = 108º$

Autor: Pedro Luis Suberviola
Revisor: Alberto de la Torre
Ilustraciones: Banco de imágenes INTEF y Pedro Luis Suberviola

También es muy común calcular el **ángulo central**: $\hat{B} = \frac{360º}{5} = 72º$

Actividades propuestas

43. Calcula los ángulos central e interior del triángulo equilátero, cuadrado, pentágono regular, hexágono regular y eneágono regular.

44. Justifica que un hexágono regular se puede descomponer en 6 triángulos equiláteros.

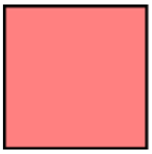
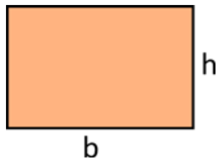
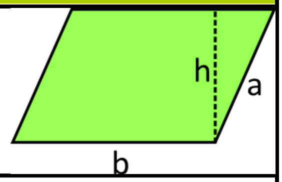
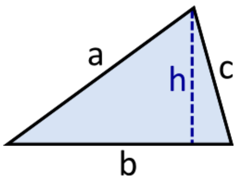
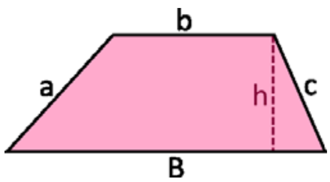
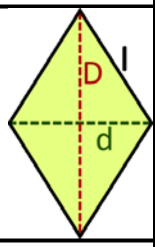
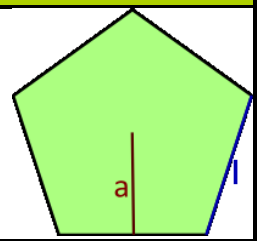
45. Dos ángulos de un triángulo isósceles miden 35º y 72º, ¿cuánto puede medir el ángulo que falta?

46. Dos ángulos de un trapecio isósceles miden 35º y 72º, ¿cuánto miden los ángulos que faltan?

47. ¿Cuánto mide la suma de los ángulos interiores de un decágono irregular?

3.3. Longitudes y áreas de figuras poligonales

Recuerda que:

Cuadrado	Rectángulo	Romboide	
			
Perímetro: P = $4l$ **Área: A** = l^2	**P** = $2b + 2h$ **A** = $b \cdot h$	**P** = $2b + 2a$ **A** = $b \cdot h$	
Triángulo	**Trapecio**	**Rombo**	**Polígono regular de *n* lados**
			
P = $a + b + c$ $A = \frac{b \cdot h}{2}$	**P** = $a + B + b + c$ $A = \frac{B + b}{2} \cdot h$	4l $A = \frac{d \cdot D}{2}$	**P** = $n \cdot l$ $A = \frac{P \cdot a}{2}$

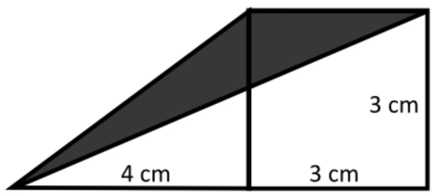
Actividades propuestas

48. Calcula el área y el perímetro de un trapecio isósceles de bases 50 cm y 26 cm y altura 5 cm.

49. Calcula el área y perímetro de un trapecio rectángulo de bases 100 cm y 64 cm, y de altura 77 cm.

50. Calcula el área y el perímetro de un trapecio isósceles de bases 80 cm y 60 cm y lados laterales 29 cm.

51. Utiliza el teorema de Tales para determinar el área y el perímetro de la zona sombreada de la figura.

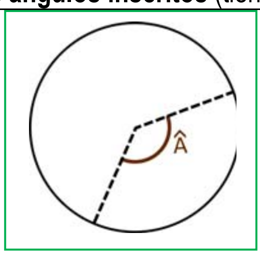
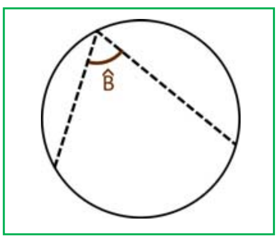
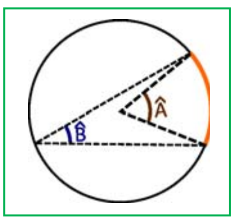


52. Teniendo en cuenta que un hexágono regular se puede dividir en seis triángulos equiláteros (cuya altura es el apotema del hexágono regular), calcula el área de un hexágono regular de 5 cm de lado.

53. Queremos cubrir el plano con polígonos regulares de 100 cm^2. Las únicas opciones posibles son el triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono. Calcula cuál de estas tres figuras tiene menor perímetro. ¿Qué animal aplica este resultado? [Utiliza la relación entre lado y altura de un triángulo equilátero obtenida anteriormente]

3.4. Ángulos de la circunferencia

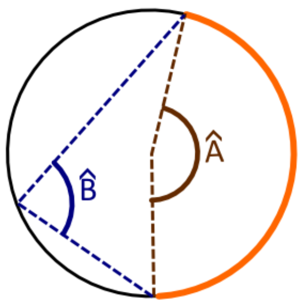
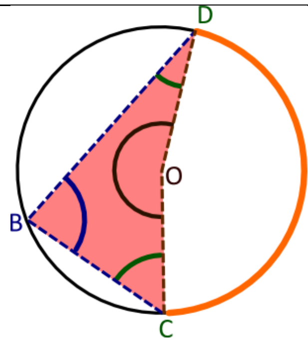
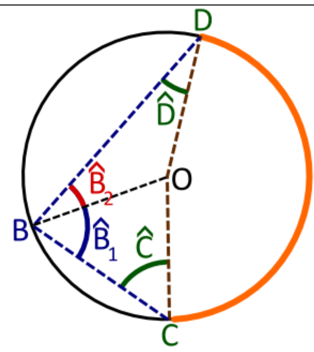
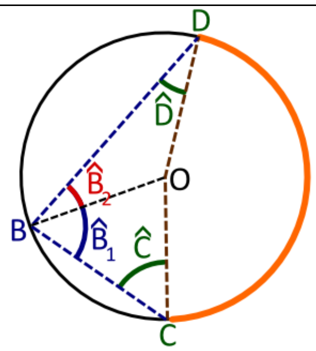
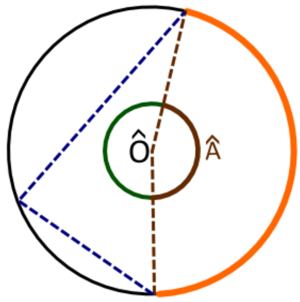
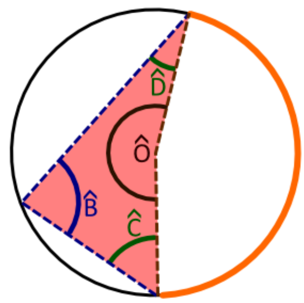
En una circunferencia tienen especial importancia los **ángulos centrales** (tienen su vértice en el centro de la circunferencia) y los **ángulos inscritos** (tienen su vértice en un punto de la circunferencia).

Ángulo central	Ángulo inscrito	$\hat{B} = \frac{\hat{A}}{2}$

Se verifica además que un ángulo inscrito mide la mitad que un ángulo central que abarca el mismo arco de circunferencia.

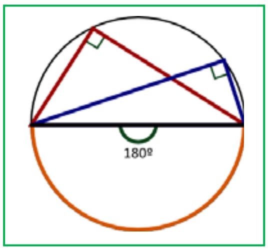
Demostración de la propiedad

		
Debemos comprobar que el ángulo $\hat{B}$ es la mitad de $\hat{A}$: $2\hat{B} = \hat{A}$	Vamos a estudiar el cuadrilátero *BCOD* y aplicar en el último paso que sus ángulos suman 360º.	*BO* y *OD* son radios de la circunferencia. Por lo tanto *BDO* es isósceles y $\hat{B}_2 = \hat{D}$.
		
Lo mismo para $\hat{B}_1$ y $\hat{C}$ Entonces $\hat{C} + \hat{D}$ = $\hat{B}_2 + \hat{B}_2$ = $\hat{B}$	Además el ángulo Ô del cuadrilátero mide 360º – $\hat{A}$.	$\hat{B} + (\hat{C} + \hat{D}) + \hat{O}$ =360º. $\hat{B}$ + ($\hat{B}$)+360º – $\hat{A}$ =360º⇒$2\hat{B} = \hat{A}$

Actividades propuestas

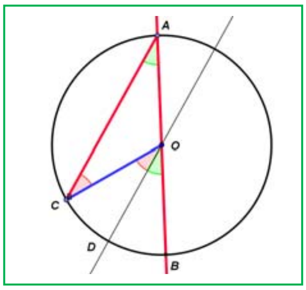
54. Tales observó que en cualquier triángulo rectángulo el circuncentro siempre estaba en el punto medio de la hipotenusa.

55. Un ángulo inscrito en la circunferencia que abarca un diámetro es un ángulo recto. ¿Por qué? Razona la respuesta.



56. ¿En qué posiciones tiene un futbolista el mismo ángulo de tiro que desde el punto de penalti?

57. Otra demostración. Intenta comprenderla. Trazamos un ángulo inscrito en la circunferencia *CAB* que tenga un lado que pase por el centro *O* de la circunferencia. Trazamos su central *COB*. El triángulo *OAC* es isósceles pues dos de sus lados son radios de la circunferencia. Trazamos por *O* una recta paralela a *AC*. El ángulo *CAO* es igual al ángulo *DOB* pues tienen sus lados paralelos. El ángulo *ACO* es igual al ángulo *COD* por alternos internos entre paralelas, y es igual al ángulo *CAO* por ser el triángulo isósceles. Por tanto el central mide el doble que el ángulo inscrito.



3.5. Longitudes y áreas de figuras circulares

Ya sabes que:

El **número π** se define como el cociente entre la longitud de la circunferencia y su diámetro.

π = Longitud de la circunferencia / Diámetro

Ya sabes que es un número irracional, con infinitas cifras decimales no periódicas. Una aproximación de **π** es 3,14, otra 3,1416, y otra 3,141592. Desde la antigüedad más lejana hasta hoy en día los matemáticos siguen investigando sobre él.

Si una circunferencia tiene un radio r, entonces su diámetro mide $2r$, y su longitud, por la definición de π, mide $2·π·r$.

Longitud de la circunferencia = $2·π·r$.

Para calcular la **longitud de un arco de circunferencia** que abarca un ángulo de α grados, debemos tener en cuenta que la circunferencia completa abarca un ángulo de 360 º. Por tanto:

$$L = 2·π·r·α/360.$$

El **área del círculo** es igual al producto del número π por el cuadrado del radio.

$$A = π·r^2.$$

El **área de una corona circular** es igual al área del círculo mayor menos el área del círculo menor.

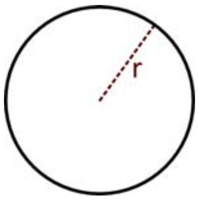
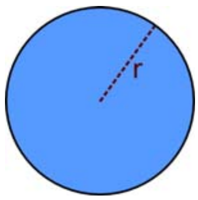
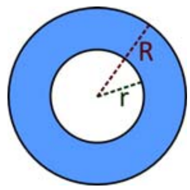
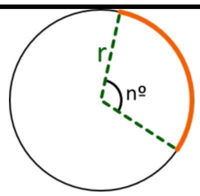
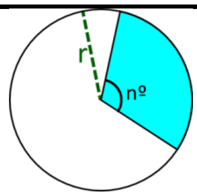
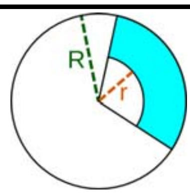
$$A = π · R^2 – π · r^2 = π·(R^2 – r^2)$$

El **área de un sector circular** que abarca un ángulo de n grados es igual a:

$$A = π·r^2·n/360.$$

Para hallar el **área del segmento circular** restamos al área del sector circular el área del triángulo.

En resumen

Longitud de la circunferencia	Área del círculo	Área de la corona circular
		
L = $2 · π · r$	**A** = $π · r^2$	**A** = $π · R^2 – π · r^2 = π · (R^2 – r^2)$
π es la razón entre el la longitud de una circunferencia y su diámetro. Es un número irracional, con infinitas cifras decimales no periódicas. Una aproximación de π es 3,14, otra 3,1416 y otra 3,141592		
Longitud del arco de circunferencia	**Área del sector circular**	**Área del trapecio circular**
		
$L = \frac{nº · 2 · π · r}{360º}$	$A = \frac{nº·π·r^2}{360º}$	$A = \frac{nº·π·(R^2 - r^2)}{360º}$

Actividades resueltas

- La circunferencia de radio 5 *cm* tiene una longitud $L = 2·π·r = 2·π·5 = 10·π ≈ 31,416$.
- Las ruedas de un carro miden 60 *cm* de diámetro, y tienen 16 radios. La longitud del arco entre cada radio es:

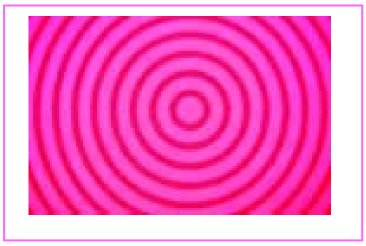
  $$L = 2·π·r·α/360 = 60·π/16 ≈ 11,78\ cm.$$
- El área de un círculo de radio 8 *cm* es $A = 64\ π ≈ 201,06\ cm^2$. Y el de un círculo de 10 *cm* de radio es $A = π ≈ 314,16\ cm^2$.
- El área de un círculo de diámetro 10 m es $A = 25π ≈ 78,54\ m^2$.
- El área de la corona circular formada por las circunferencias concéntricas de radios 9 *cm* y 5 *cm* es igual a: $A = π·(R^2 – r^2) = π·(9^2 – 5^2) = π·(81 – 25) = π·56 ≈ 175,93\ cm^2$.
- Para hallar el área del *sector* circular de radio 10 m que abarca un ángulo de 90º, calculamos el área del círculo completo: $π·10^2 = 100\ π$, y hallamos la proporción:

  $$A_S = 100π·90/360 = 25π ≈ 78,54\ m^2.$$

- Para hallar el área del *segmento* circular, restamos al área anterior el área del triángulo rectángulo de base 10 *m* y altura 10 *m*, $A_T = 10\cdot 10/2 = 50\ m^2$. Luego el área del segmento es:

$$A = A_S - A_T = 78,54 - 50 = 28,54\ m^2.$$

Actividades propuestas



58. Las circunferencias de tamaño real de la ilustración del margen tienen como radio, la menor 1 *cm*, la siguiente, un poco más oscura 2 *cm*, la clara siguiente 3 *cm*, y así, aumenta un centímetro. Calcula las longitudes de las 10 primeras circunferencias.

59. La Tierra es aproximadamente una esfera de radio 6.379 *km*. ¿Cuánto mide el Ecuador?

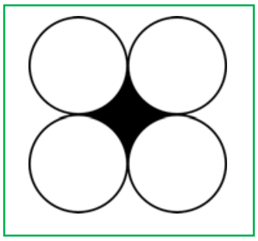
60. Antiguamente se definía un metro como: *"la diez millonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre que pasa por París*". Según esta definición, ¿cuánto mide (en metros) el diámetro terrestre?

61. Un faro gira describiendo un arco de 170º. A una distancia de 5 *km*, ¿cuál es la longitud del arco de circunferencia en el que se ve la luz?

62. Determina el lado del triángulo equilátero de la figura construido usando arcos de circunferencia de 10 cm de radio.

63. Calcula el área encerrada por una circunferencia de radio 9 cm.

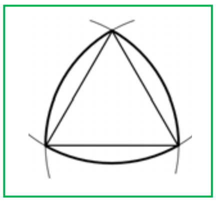
64. Calcula el área de la corona circular de radios 12 y 5 *cm*.



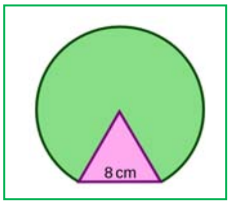
65. Calcula el área del sector circular y del segmento circular de radio 6 *cm* y que forma un ángulo de 60º.

66. Calcula el área del sector de corona circular de radios 25 *cm* y 18 *cm* y que forma un ángulo de 60º.

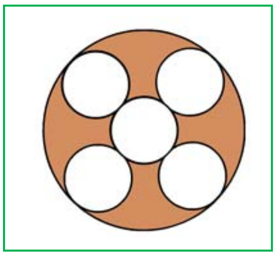
67. Calcula el área encerrada entre estos círculos de 5 cm de radio.



68. Queremos construir una rotonda para una carretera de 9 metros de ancho de forma que el círculo interior de la rotonda tenga el mismo área que la corona circular que forma la carretera. ¿Qué radio debe tener la rotonda?



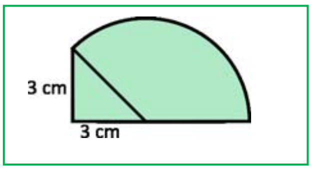
69. Una figura típica de la arquitectura gótica se dibuja a partir de un triángulo equilátero trazando arcos de circunferencia con centro en cada uno de sus vértices y que pasan por los dos vértices restantes. Calcula el área de una de estas figuras si se construye a partir de un triángulo equilátero de 2 metros de lado. Calcula el área encerrada entre estos círculos de 5 cm de radio.



70. Calcula el área y el perímetro de la figura formada por un triángulo equilátero de 8 cm de lado sobre el que se construye un sector circular.

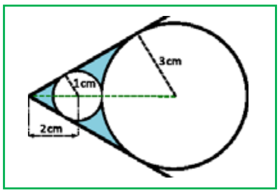
71. Hay 5 circunferencias inscritas en una circunferencia de 12 cm de radio tal como indica la figura. ¿Cuánto vale el área sombreada?

72. Un queso cilíndrico tiene una base circular de 14 cm de diámetro y una etiqueta circular de 8 cm de diámetro. Se corta una cuña de 70º. ¿Qué área tiene el trozo de etiqueta cortada?

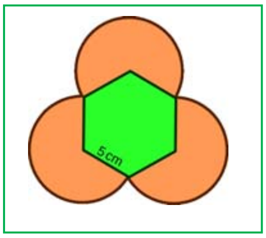


73. De un queso de 18 cm de diámetro cortamos una cuña de 50º. La etiqueta tiene 7 cm de radio. ¿Qué área del queso está visible?

74. A partir de un triángulo rectángulo isósceles de 3 cm de cateto construimos un sector circular. Calcula el área de la figura.



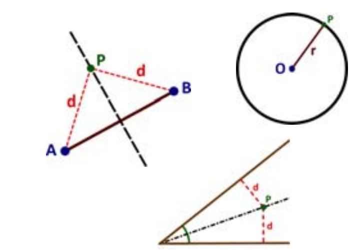
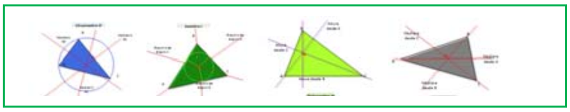
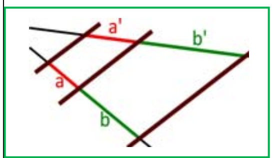
75. En dos rectas que forman 60º se inscriben dos circunferencias tangentes entre sí. La primera tiene el centro a 2 centímetros del vértice y el radio de 1 centímetro. La segunda tiene de radio 3 centímetros. ¿Cuánto vale el área sombreada?



76. Trazamos tres arcos circulares desde tres vértices de un hexágono de 5 cm de lado. Calcula el área y el perímetro de la figura.

Todo lo que hemos visto en este capítulo, excepto el enunciado del teorema de Tales y la semejanza de triángulos ya lo conocías. Lo estudiaste en primero de ESO. Allí se vio con detenimiento. Si no lo recuerdas y necesitas más explicaciones o problemas puedes verlo en el capítulo 8: Figuras Planas, de Primero de ESO, página 184, y en el capítulo 9: Longitudes y áreas, de primero de ESO, página 216.

RESUMEN

		Ejemplos
Lugares geométricos	**Circunferencia** es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan del centro. **Mediatriz de un segmento** es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los extremos del mismo. Dado un ángulo delimitado por dos rectas, la **bisectriz** del ángulo es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de las mismas.	
Rectas y puntos notables de un triángulo	Mediatrices y circuncentro Bisectrices e incentro Alturas y ortocentro. Medianas y baricentro	
Semejanza	Dos figuras semejantes tienen *la misma forma*. Dos polígonos son semejantes si sus lados son proporcionales y sus ángulos son iguales.	
Criterios de semejanza de triángulos	Dos triángulos son semejantes si: 1) Tienen 2 ángulos iguales. 2) Tienen los 3 lados proporcionales. 3) Tienen dos lados proporcionales y el ángulo que forman es igual	
Teorema de Tales	Establece una relación entre los segmentos formados cuando dos rectas cualesquiera son cortadas por varias rectas paralelas: $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{a'+b'}{a+b}$	
Teorema de Pitágoras	En un triángulo rectángulo, la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos: $h^2 = c_1^2 + c_2^2$ $h=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5\ cm.$	
Suma de los ángulos de un polígono	La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180·*n*.	

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Lugares geométricos

1. Dibuja en tu cuaderno un triángulo de lados 2 cm, 3 cm y 4 cm. Traza en él, utilizando regla y compás, las mediatrices y bisectrices. Determina el circuncentro y el incentro. Traza las circunferencias inscritas y circunscritas.

2. Dibuja en tu cuaderno un triángulo de lado 5 cm y ángulos adyacentes al mismo de 30º y 50º. Traza en él, utilizando regla y compás, las medianas y las alturas. Determina su ortocentro y su baricentro.

3. Dibuja en tu cuaderno un triángulo con un ángulo de 50º comprendido entre dos lados de 5 y 8 cm. Obtén su circuncentro y su incentro.

4. ¿Cómo son las rectas y puntos notables de un triángulo rectángulo?

5. ¿Cómo son las rectas y puntos notables de un triángulo isósceles?

Semejanza

6. Indica si son semejantes los siguientes pares de triángulos:

a) Un ángulo de 70º y otro de 20º. Un ángulo de 90º y otro de 20º.

b) Triángulo isósceles con ángulo desigual de 80º. Triángulo isósceles con un ángulo igual de 50º.

c) A = 40º, b = 8 cm, c = 10 cm. A'= 40º, b' = 4 cm, c' = 5 cm

d) a = 3 cm, b = 4 cm, c = 6 cm. a' = 9 cm, b' = 12 cm, c' = 19 cm

7. Calcula el valor desconocido para que los triángulos sean semejantes:

a) a = 15 cm, b = 9 cm, c = 12 cm. a' = 10 cm, b' = 4 cm, ¿c'?

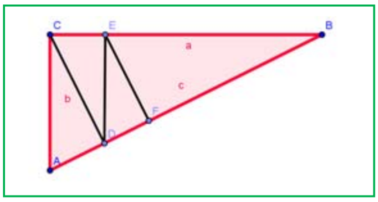
b) A = 50º, b = 6 cm, c = 4 cm. A' = 50º, b' = 18 cm, ¿a'?

8. Las longitudes de los lados de un triángulo son 12 cm, 14 cm y 14 cm. Un triángulo semejante a él tiene un perímetro de 90 cm. ¿Cuánto miden sus lados?

9. Dibuja en tu cuaderno un pentágono regular. Traza sus diagonales. El triángulo formado por un lado del pentágono y las dos diagonales del vértice opuesto se denomina triángulo áureo, pues al dividir el lado mayo entre el menor se obtiene el número de oro, ¿cuánto miden sus ángulos? Busca en la figura que has trazado otros triángulos áureos. ¿Cuál es la relación de proporcionalidad?

10. ¿Cuánto es la suma de los ángulos interiores de un rombo?

11. La sombra de un edificio mide 15 m, y la del primer piso 2 m. Sabemos que la altura de ese primer piso es de 3 m, ¿cuánto mide el edificio?



12. En el museo de Bagdad se conserva una tablilla en la que aparece dibujado un triángulo rectángulo *ABC*, de lados a = 60, b = 45 y c= 75, subdividido en 4 triángulos rectángulos menores *ACD*, *CDE*, *DEF* y *EFB*, y el escriba calcula la longitud del lado *AD* como 27. ¿Ha utilizado la semejanza de triángulos? ¿Cómo se podría calcular? ¿Qué datos necesitas? Calcula el área del triángulo *ABC* y del triángulo *ACD*. Determina la longitud de los segmentos *CD*, *DE* y *EF*.

13. Demuestra que en dos triángulos semejantes las medianas son proporcionales.

14. Un triángulo rectángulo isósceles tiene un cateto de longitud 7 cm, igual a la hipotenusa de otro triángulo semejante al primero. ¿Cuánto valen las áreas de ambos triángulos?

15. Uniendo los puntos medios de los lados de un triángulo se obtiene otro triángulo. ¿Cómo son? ¿Qué relación hay entre sus perímetros? ¿Y entre sus áreas?

16. La altura y la base de un triángulo rectángulo miden respectivamente 4 y 7 cm; y es semejante a otro de base 26 cm. Calcula la altura del nuevo triángulo y las áreas de ambos.

Ángulos, longitudes y áreas

17. Construye un triángulo conociendo la altura sobre el lado a, el lado a y el c.

18. Calcula la longitud del lado de un octógono regular inscrito en una circunferencia de radio 5 cm.

19. Calcula la apotema de un hexágono regular lado 7 cm.

20. Calcula el área de un círculo cuya circunferencia mide 50 cm.

21. Calcula la longitud de una circunferencia cuya círculo tiene una superficie de mide 50 cm^2.

22. La Tierra da una vuelta cada 24 horas, ¿a qué velocidad se mueve un punto del Ecuador?

23. ¿Qué relación hay entre las áreas un triángulo inscrito en un círculo y la del círculo?

24. Los griegos conocían las dos siguientes posibles formas de construir un triángulo rectángulo con sus tres lados de longitud un número natural, sin más que dar valores a n. Comprueba si se verifican para n = 1, 2, …. a) Catetos: $2n$ y $n^2 - 1$, hipotenusa: $n^2 + 1$. b) Catetos: $2n + 1$ y $2n^2 + 2n$, hipotenusa: $2n^2 + 2n + 1$.

25. Al aumentar en 3 cm el lado de un cuadrado su área aumenta 32 cm^2 ¿Cuánto mide el lado de dichos cuadrados?

26. Se quiere cubrir un terreno circular de 25 m de diámetro con gravilla, echando 10 kg por cada metro cuadrado. ¿Cuánta gravilla se necesita?

27. Una escalera de 4 m de longitud está apoyada sobre una pared. El pie de la escalera dista 1,5 m de la pared. ¿Qué altura alcanza la escalera sobre la pared?

28. Calcula el área de la circunferencia circunscrita a un rectángulo de lados 7 y 9 cm.

29. Calcula el área de un hexágono regular de 3 cm de lado. Prolonga los lados del hexágono y dibuja un hexágono estrellado. Calcula su área.

30. La señal de tráfico de STOP tiene forma de octógono regular. Su altura mide 90 cm, y su lado 37 cm, ¿cuánto mide su superficie?

31. Calcula el área de un triángulo equilátero de lado 10 cm.

32. Calcula el área de un hexágono regular de perímetro 60 cm.

33. Calcula el área de un trapecio isósceles de base menor 5 cm, lado 3 cm y altura 4 cm.

34. Calcula el área de un trapecio isósceles de bases 8 y 6 cm y lado 3 cm.

35. Calcula el área y el perímetro de un rectángulo de lado 4 cm y diagonal 7 cm.

36. Calcula el área y el perímetro de un cuadrado de diagonal 9 cm.

37. Calcula el área y el perímetro de un triángulo isósceles de base 8 cm y altura 6 cm.

38. Un triángulo mide de altura π y de base π + 1. ¿Es rectángulo?

39. Dibuja un triángulo rectángulo isósceles de catetos de longitud 1, ¿cuánto mide la hipotenusa? Tomando dicha hipotenusa como cateto y con el otro cateto igual a 1 dibuja un nuevo triángulo rectángulo. ¿Cuánto mide la nueva hipotenusa? Continúa el proceso 4 veces, ¿cuánto mide la última hipotenusa?

40. Dibuja un triángulo rectángulo de catetos de longitud 1 y 2 cm, ¿cuánto mide la hipotenusa? Tomando dicha hipotenusa como cateto y con el otro cateto de longitud 1 cm dibuja un nuevo triángulo rectángulo. ¿Cuánto mide la nueva hipotenusa? Continúa el proceso 3 veces, ¿cuánto mide la última hipotenusa?

41. Calcula la altura de una pirámide regular cuadrangular de lado de la base 10 m y de arista 15 m.

42. Calcula la generatriz de un como de radio de la base 5 m y de altura 7 m.

43. Dos ascetas hindúes viven en lo alto de un acantilado de 10 m de altura cuyo pié está a 200 metros del pueblo más cercano. Uno de los ascetas baja del acantilado y va al pueblo. El otro, que es mago, asciende una distancia *x* y viaja volando en línea recta al pueblo. Ambos recorren la misma distancia. ¿Cuánto ha ascendido el mago?

44. ¿Cuánto mide la arista de la base de la pirámide de Keops si mide 138 m de altura y 227 m de arista?

AUTOEVALUACIÓN

1. Todos los puntos que están a la misma distancia de dos puntos dados están en:

a) una bisectriz b) una circunferencia c) una elipse d) una mediatriz

2. Las tres medianas de un triángulo se cortan en el:

a) ortocentro b) baricentro c) incentro d) circuncentro

3. El circuncentro es el centro de:

a) gravedad del triángulo b) la circunferencia inscrita c) la circunferencia circunscrita

4. Dos triángulos son semejantes si:

a) tienen dos ángulos iguales b) tienen dos lados proporcionales
c) tienen un ángulo igual d) sus áreas son semejantes

5. Sabemos que los triángulos *ABC* y *A'B'C'* son semejantes. Calcula el valor de *a'* y *c'* para que lo sean, sabiendo que *a* = 10 cm, *b* = 6 cm, *b'* = 3 cm, *c* = 8 cm:

a) *a'* = 4 cm y *c'* = 6 cm b) *a'* = 5 cm y *c'* = 6 cm
c) *a'* = 4 cm y *c'* = 4 cm d) *a'* = 5 cm y *c'* = 4 cm

6. Si la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 7 cm y un cateto mide 3 cm, entonces el otro cateto mide aproximadamente:

a) 6,3 cm b) 5 cm c) 5,8 cm d) 6,9 cm

7. La suma de los ángulos interiores de un polígono irregular de diez lados vale:

a) 1440º b) 1620º c) 1800º d) 1260º

8. El área de un rombo de lado 5 cm y una diagonal de 8 cm mide:

a) 48 cm^2 b) 36,7 cm^2 c) 24 cm^2 d) 21,2 cm^2

9. El ángulo central del inscrito en la circunferencia que abarca un ángulo de 72º mide:

a) 720º b) 108º c) 36º d) 144º

10. La longitud de la circunferencia y el área del círculo de radio 3 cm son respectivamente:

a) 6π cm y 9π cm^2 b) 9π cm y 6π cm^2 c) 3π cm y 3π cm^2 d) 18 cm y 27 cm^2

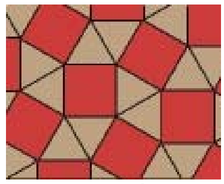
CAPÍTULO 8: MOVIMIENTOS EN EL PLANO Y EL ESPACIO.
Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas: 3º B de ESO

1. TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

Muchas decoraciones se hacen repitiendo un motivo. En los mosaicos de la Alhambra, en las rejas, en las puntillas y las grecas, en los rosetones de las iglesias… en todas partes puedes ver diseños hechos mediante otro más sencillo. Al observar un edificio puedes ver que en ocasiones está compuesto por algún trozo que se ha ido desplazando, o girando, o hallando el simétrico.

Imagina que estás manipulando un mapa en un móvil con los dos dedos: Puedes desplazarte, girar el mapa, ampliarlo, reducirlo... pero el mapa siempre es básicamente el mismo. Estas manipulaciones son "transformaciones geométricas", porque mantienen las propiedades geométricas más básicas de los objetos: longitudes, ángulos, áreas, volúmenes, o la proporción entre las longitudes, la forma…

1.1. Isometrías


Isometrías

En el mosaico del margen todos los cuadrados son iguales y también son iguales todos los triángulos.

A las transformaciones geométricas que nos llevan de un cuadrado a otro (o de un triángulo a otro) que mantienen la forma y el tamaño las llamamos isometrías o movimientos.

La palabra *isometría* proviene del griego: Iso = Igual. Metría = Medida. Significa por tanto: *Igual medida*.

En el ejemplo del mapa, siempre que no hagas zoom, estarás usando una isometría.

Las **isometrías**, (**movimientos** o **congruencias**) son transformaciones geométricas que conservan ángulos y distancias (aunque no tienen por qué conservar la orientación de los ángulos).

Isometrías en el plano son las **traslaciones**, los **giros** y las **simetrías**.

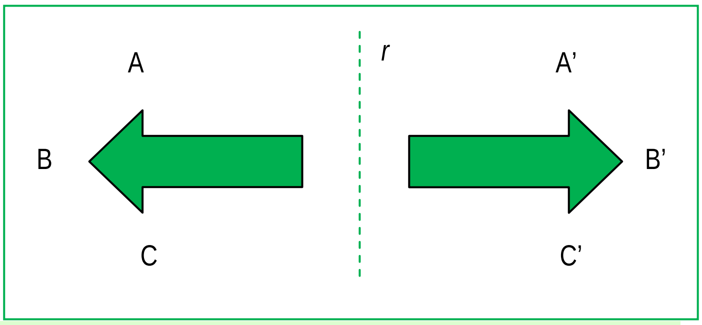
Actividades propuestas

1. En tu cuaderno dibuja un triángulo. Cálcalo y copia la figura calcada de nuevo en tu cuaderno. Mide todos los lados de las figuras homólogas. ¿Miden lo mismo? Mide todos sus ángulos. ¿Miden lo mismo?

Dibuja en tu cuaderno una letra B y haz un diseño con ella, trasladándola, girándola o dibujando letras B simétricas.

1.2. Isometrías directas e inversas

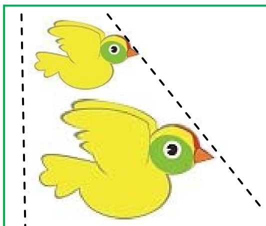
Actividades resueltas



- *En la figura del margen observa que* una flecha se transforma en la otra mediante la simetría de eje *r*. El ángulo *ABC*, ¿es igual al ángulo *A'B'C'*? Tienen la misma amplitud, que en ambos es de 90º, pero su orientación es distinta. Mientras que *ABC* gira en el sentido de las agujas del reloj, es decir, tiene sentido negativo, mide –90º, *A'B'C'* gira en el sentido contrario a las agujas del reloj, por lo que su sentido es positivo y mide +90º.

Entre las isometrías hay dos tipos de transformaciones, las que conservan los ángulos (su amplitud y su sentido) que se llaman isometrías **directas**, y las que conservan la amplitud de los ángulos pero cambian su sentido, que se llaman isometrías **inversas**.

- Las traslaciones y los giros en el plano son isometrías directas. Las simetrías son isometrías inversas.
- Tus manos son simétricas. Son iguales. Pero, ¿las puedes superponer? ¿Y tus pies? La simetría es una isometría inversa.
- Imagina el mapa hecho sobre plástico transparente: Si volteas el mapa sobre la mesa, las longitudes y ángulos se mantienen (es una isometría) pero ahora no podrías colocar la ciudad de Valencia de este nuevo mapa, sobre la ciudad de Valencia del mapa original, por más que lo movieras nunca te podrían coincidir. Es una isometría inversa.


Semejanza. Homotecia

Observación:

Unos autores denominan movimientos a las isometrías, y otros estiman que si moviendo las manos nunca vamos a poder superponerlas, las isometrías inversas no deben llamarse movimientos.

1.3. Semejanzas

Si haces zoom con los dos dedos en el mapa, las longitudes cambian, así que no es una isometría, pero el mapa sigue siendo el mismo: los ángulos y sus sentidos sí que se conservan, y las proporciones entre las medidas también (la calle que era el doble de larga que otra lo sigue siéndolo). Estos cambios de escala se denominan "semejanzas".

Las figuras del margen son **semejantes**. Es la misma imagen sólo que ampliada. Se mantiene la misma proporción en todas las direcciones. Se mantiene la forma, pero no el mismo tamaño. A estas transformaciones las llamamos **semejanzas**, o si tienen una determinada posición: **homotecias**.

En una semejanza las figuras homólogas tienen los ángulos iguales y los lados proporcionales.

- Cuando haces zoom en una foto con el móvil estás haciendo una homotecia. Al poner los dos dedos sobre la pantalla defines dos puntos: el origen *O* seria el punto justo entre tus dos dedos y no se moverá al hacer zoom, y el punto *P* estaría en tu primer dedo. Al mover ese dedo estas definiendo el tercer y último punto *P'* y el móvil amplia la foto para que el punto *O* quede fijo y *P* se estire hasta *P'*.

Las homotecias tienen un centro de homotecia, *O*, y un punto *P* se transforma por una homotecia en el punto *P'* que está en la recta *OP*, si se verifica que: *OP'* = *r*·*OP* donde *r* es un número llamado **razón de homotecia**.

Actividades propuestas

2. En tu cuaderno dibuja una letra b minúscula, y a continuación otra letra b minúscula el doble de grande. ¿Cómo son sus longitudes y sus ángulos? ¿Es una semejanza?
3. Dibuja ahora una letra d minúscula. ¿Es semejante a la letra b anterior?

1.4. Composición de transformaciones geométricas

Ejemplo:

- *Observa cómo se ha construido este bello mosaico de la* Alhambra.

Se ha analizado buscando la celda unidad, (un cuadrado formado por cuatro cuadrados) y el motivo mínimo (la mitad de uno de esos cuadrados). En el motivo mínimo, un triángulo rectángulo isósceles, se ha dibujado una sencilla poligonal. Se le han aplicado distintas isometrías: Una simetría de eje la hipotenusa. Al motivo formado por el inicial y su simétrico se le han aplicado cuatro giros de 90º. Se ha vuelto a girar el conjunto. Se ha dado color. Se ha trasladado horizontal y verticalmente.

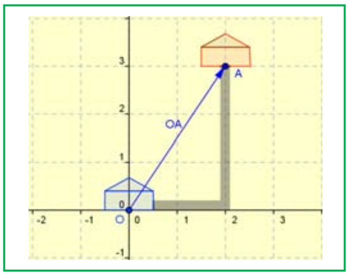
Cuando aplicamos varias transformaciones, estamos componiendo transformaciones geométricas.

Actividades propuestas

4. En tu cuaderno marca una trama formada por cuadrados de dos cuadraditos de lado. En un cuadradito haz un garabato, una poligonal, una línea curva… Dibuja la simétrica tomando como eje de simetría un lado del cuadrado. Dibuja la figura simétrica del conjunto obtenido tomando como ejes siempre los lados de la trama inicial. Colorea la figura obtenida. Trasládala horizontal y verticalmente.

2. TRASLACIONES

2.1. Vectores



Si Susana está en su casa y quiere ir a casa de Nadia, que vive 2 calles al Este y 3 calles al Norte, el trayecto que debe hacer es el que en la figura está dibujado en gris.

Llamamos "*O*" a la posición de la casa de Susana, y "*A*" a la posición de la casa de Nadia. Si Susana tuviera un helicóptero podría ir directamente en línea recta y seguiría la dirección *OA*. Lo representamos con una flecha y se denomina vector fijo.

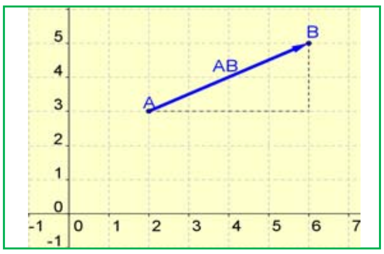
Un vector fijo *OA* es un segmento orientado con origen en el punto *O* y extremo en el punto *A*. Tiene una dirección, la de la recta, un sentido, desde *O* hasta *A*, y una longitud, a la que llamamos módulo.

Un **vector fijo** *OA*, de **origen** en *O* y **extremo** en el punto *A*, se caracteriza por:

Su **módulo**, que es la longitud del segmento *OA* y que se escribe $|OA|$.

Su **dirección**, que es la recta que contiene al segmento.

Su **sentido** que va desde el origen *O* hasta el extremo *A*.



Las coordenadas o componentes de un vector vienen determinadas por su origen y su extremo.

Ejemplo:

- *Si conocemos las coordenadas del punto origen y del punto final podemos calcular las coordenadas del vector.* Observa el dibujo del margen y comprueba que si *A* (2, 3) y *B* (6, 5) las coordenadas del vector fijo *AB* son ***AB*** = (6 – 2, 5 – 3) = (4, 2).

En general, si *A* (*a*, *b*) y *B* (*c*, *d*) entonces ***AB*** = (*c* – *a*, *d* – *b*)

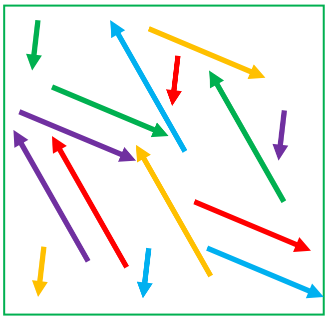
El módulo de un vector se calcula utilizando el Teorema de Pitágoras. Así, el vector de coordenadas ***u*** = (*x*, *y*) tiene de módulo: $|\,\mathbf{u}\,| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Actividades propuestas

5. Dibuja en tu cuaderno los puntos de coordenadas *A* (–5, 2), *B* (–1, 6) y *C* (2, –3). Halla las coordenadas de los vectores fijos *AB*, *AC*, *BC*, *CA* y *CB*. Comprueba en tu dibujo que esas son sus coordenadas.
6. El vector fijo *AB* tiene de coordenadas (4, 2), calcula las coordenadas de su origen *A* sabiendo que las coordenadas de su extremo *B* son (–1, 1). Represéntalo gráficamente.
7. Las coordenadas de *A* son (2, 3) y las del vector fijo *AB* son (4, –2). Calcula las coordenadas del punto *B*. Represéntalo gráficamente.

Todos los segmentos orientados o vectores fijos que tienen el mismo módulo, dirección y sentido, tienen las mismas coordenadas, entonces se dice que son el mismo vector libre, y podemos usarlo en diferentes puntos origen.

Dos vectores fijos son **equipolentes** cuando tienen igual módulo, dirección y sentido, y por lo tanto tienen las mismas coordenadas.

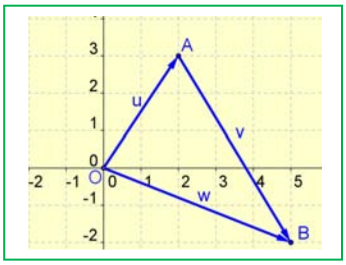


Todos los vectores que son equipolentes se dicen que son un **vector libre**, y cada uno de sus vectores fijos, un **representante** del vector. Al vector libre lo identificamos por sus coordenadas.

Actividades propuestas

8. Nombra a los vectores fijos de la figura e indica cuáles son representantes de un mismo vector libre.
9. Dibuja en tu cuaderno cuatro vectores equipolentes al vector fijo con origen en *A* (–3, 4) y extremo *B* (5, 0), con orígenes en los puntos *C* (0, 3), *D* (5, 2), *E*(–4, 0) y *F* (–2, –5).
10. Dibuja en tu cuaderno los puntos *A* (–2, 2), *B* (–3, 0), *C* (2, 4), *D* (6, 2), *E* (2, 0), *F* (6, –2) y *G* (2, –4). Con los vectores fijos de origen y extremo en dichos puntos, indica cuáles de ellos son equipolentes.

Con los puntos del ejercicio anterior, calcula las coordenadas de los vectores fijos *DE* y *FG*. ¿Cómo son? ¿Son dos representantes de un mismo vector libre?



Actividades resueltas

- *El vector fijo OA* = ***u*** *que indica el trayecto de Susana tiene de coordenadas* (2, 3). Si luego Susana quiere desplazarse a casa de otra amiga que está a 3 calles al Este y 5 calles al Sur hará un desplazamiento de vector: ***v*** = (3, –5). En conjunto Susana ha hecho un desplazamiento que es la suma de los dos desplazamientos anteriores. Finalmente está en el punto:

(2, 3) + (3, –5) = (5, –2).

Se encuentra 5 calles al Este y dos calles al Sur de su casa.

Se **suman** dos vectores, sumando sus componentes: (*a*, *b*) + (*c*, *d*) = (*a* + *b*, *c* + *d*)
Se multiplica un vector por un número, multiplicando sus componentes: *r*·(*a*, *b*) = (*r*·*a*, *r*·*b*)

Actividades propuestas

11. Dibuja en tu cuaderno un sistema de referencia cartesiano y señala en él los puntos de coordenadas: *A* (4, 5), *B* (–5, 6) y *C* (2, –5). a) Llama **u** al vector fijo *AB* e indica sus componentes. b) Llama **v** al vector fijo *BC* e indica sus componentes. c) Calcula las componentes del vector **w** = **u** + **v**. d) Representa en tu cuaderno a los vectores libres **u** y **v** con origen en el origen de coordenadas y representa también al vector suma **w**. Observa que está sobre la diagonal del paralelogramo construido sobre **u** y **v**.
12. Dibuja en tu cuaderno el punto *A* (1, 2), dibuja ahora el vector **u** = (2, 3) con origen en *A*, y el vector **v** = (4, –1) también con origen en A. Calcula las coordenadas del vector suma **u** + **v**, y dibújalo con origen en *A*. ¿El resultado coincide con lo que has obtenido gráficamente? Observa que el vector suma es la diagonal de un paralelogramo construido sobre **u** y **v**.
13. Efectúa las siguientes operaciones con vectores:

a) $3\cdot\left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{6}\right) + \frac{1}{2}\cdot(4, 8)$ b) (5, –9) – [(6, 3) + (–4, –6)]

c) 5·[(–1, 0) – (–2, 3)] + (–3)·[(4, –2) –6·(4, –5)]   d) 9'3·(2, 6) + (3'7, 5'2)

14. Efectúa las siguientes operaciones con los vectores *u* = (–5, 6), *v* = (4, –7) y *w* = (3, 4):

a) 2*u* – (*v* + *w*)   b) 3*w* – 2*u* + *v*   c) 2(*u* + *v*) – 3*w*

2.2. Traslaciones en el plano

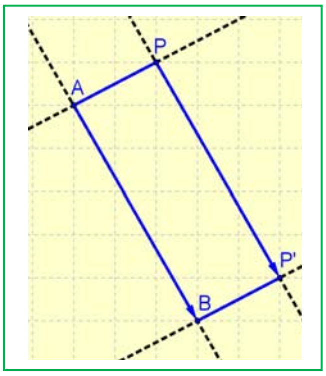
Un coche se mueve por la ciudad desde el domicilio del dueño hasta su trabajo, y se ha trasladado 4 calles hacia el norte y 3 calles hacia el este.

Es posible conocer una **traslación** si sabemos el punto de origen *A* y el de destino *B*. Estos dos puntos, *A* y *B*, determinan el **vector de traslación** *AB*. *AB* es un vector fijo, representante del vector libre *u* de iguales coordenadas.

Para definir una **traslación** basta conocer su **vector de traslación**.

Si la traslación de vector libre *u* = *AB* transforma un punto del plano *P* en otro *P'*, entonces *AB* y *PP'* tienen igual módulo, dirección y sentido. Son el mismo vector libre. Tienen las mismas coordenadas.

Si con la traslación de vector *AB* trasladamos el punto *P* hasta el punto *P'* entonces *ABP'P* es un **paralelogramo**, y *AB* = *PP'*



Para trasladar una figura se trasladan los puntos que la determinan. Como en una traslación todos los puntos se mueven sobre rectas paralelas y una misma distancia, se puede usar la escuadra y el cartabón para trazar las rectas paralelas y trasladar sobre ella algunos puntos de la figura, para lo que se debe medir siempre la misma distancia sobre la recta.

Propiedades de las traslaciones

Los paralelogramos tienen, como sabes, sus lados iguales dos a dos y paralelos dos a dos.

La recta *AB* es paralela a la recta *PP'*, y la recta *AP* es paralela a la recta *BP'*. Los segmentos *AB* y *PP'* son iguales, lo mismo que *AP* y *BP'*.

Por este motivo, entre una figura y su trasladada **se conservan todas las distancias y todos los ángulos**.

La traslación es una **isometría**, un **movimiento directo**.

Identidad:

La traslación de vector de traslación nulo, **0** = (0, 0) deja todos los puntos invariantes, es decir, no traslada nada, y se denomina también traslación identidad o simplemente: **identidad**.

Puntos invariantes:

Un **punto invariante** es el que se transforma en sí mismo. Una **recta invariante** es la que se transforma en ella misma, aunque sus puntos no sean invariantes. Una **recta invariante de puntos invariantes** es un caso particular de recta invariante en la que cada uno de sus puntos es un punto invariante.

¿Qué puntos deja invariantes una traslación? Observa que salvo la traslación identidad, (que deja todo el plano invariante), una traslación no deja a ningún punto invariante.

Actividades propuestas

15. Dibuja en tu cuaderno una figura y utiliza escuadra y cartabón para trasladarla 5 centímetros hacia la derecha.
16. Dibuja en tu cuaderno una figura. (Si no se te ocurre ninguna otra, dibuja la letra G). Coloca encima un papel vegetal y cálcala. Desplaza en línea recta el papel vegetal y vuelve a calcar la figura. Las dos figuras que has obtenido, ¿tienen todas sus medidas, tanto longitudes como ángulos, iguales? Traza las rectas que unen pares de puntos correspondientes, ¿cómo son esas rectas? ¿Qué trayectoria han seguido los puntos en el desplazamiento?

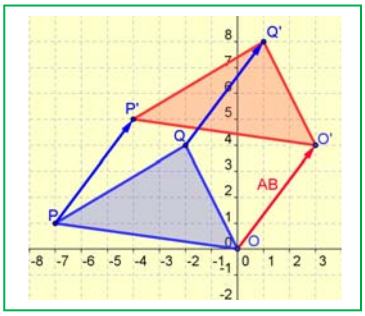
Un friso en Camboya

17. Con ayuda de papel cuadriculado transforma mediante una traslación una recta, una circunferencia, un segmento, un triángulo, dos rectas paralelas y dos rectas perpendiculares. ¿En qué se transforman? Analiza los resultados.
18. Observa este friso de un templo de Camboya. Es una figura que se repite por traslación. ¿Qué dirección tiene el vector de traslación? ¿De dónde a dónde iría?

2.3. Coordenadas

Para trabajar con traslaciones puedes utilizar las coordenadas:

Actividades resueltas



- *A los puntos P* (–7, 1), *Q* (–2, 4) y *O* (0, 0) se les aplica una traslación de 3 unidades hacia la derecha y 4 unidades hacia arriba de modo que su vector de traslación es:

  AB = (3, 4)

  Entonces las **coordenadas de los puntos trasladados** se obtienen sumando a la abscisa del punto que queremos trasladar la abscisa del vector de traslación, y a la ordenada del punto, la ordenada del vector de traslación:

  Para trasladar *P* (–7, 1) según el vector *AB* = (3, 4) se calcula –7 + 3 = –4, 1 + 4 = 5, por lo que su punto trasladado es: *P'* (–4, 5).

  Al trasladar *Q* (–2, 4) se obtiene *Q'* (–2 + 3, 4 + 4) = (1, 8).

  Al trasladar *O* (0, 0) según el vector *AB* = (3, 4) se obtiene *O'* (3, 4).

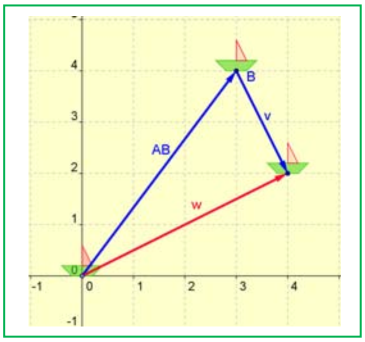
Actividades propuestas

19. Utiliza papel cuadriculado y dibuja en tu cuaderno una letra F de 2 cuadraditos de alta y 1 cuadradito de ancha y aplícale la traslación de vector (2, 5).
20. Dibuja en tu cuaderno unos ejes cartesianos y el triángulo de vértices *A* (3, 1), *B* (3, 3) y *C* (1, 3). Aplícale la traslación de vector (4, 2): 4 unidades a la derecha y 2 unidades hacia arriba. ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos trasladados *A'*, *B'* y *C'*?

2.4. Composición de traslaciones

Si trasladas una figura mediante una traslación de vector **u**, y luego vuelves a trasladarla mediante otra de vector **v**, puedes comprobar que puedes ir de la primera figura a la última mediante una única traslación. El vector de traslación de esta última traslación puedes obtenerlo sumando los vectores de traslación de las dos primeras: **u** + **v**.

Actividades resueltas



- Trasladamos mediante el vector de traslación AB = (3, 4), y luego mediante el vector de traslación **v** = (1, –2). La composición de ambas traslaciones es otra traslación de vector de traslación **w**:

$$\mathbf{w} = AB + \mathbf{v} = (3 + 1, 4 - 2) = (4, 2)$$

Actividades propuestas

21. Las puntillas se diseñan a partir de un motivo que se ha ido trasladando a todo lo largo. Dibuja en tu cuaderno un motivo, una flor, una V, un zig-zag… y trasládalo componiendo varias traslaciones de un mismo vector de traslación. Has dibujado un friso.

Traslación inversa:

Actividades resueltas

- *Si hemos trasladado una figura* 4 unidades hacia la derecha y 3 hacia arriba, ¿cómo debemos trasladarla para que ocupe la posición inicial? Hay que trasladarla con el vector: (–4, –3).

Decimos que estas traslaciones son la una inversa de la otra.

En general, la **traslación inversa** de la de vector de traslación **v** = (*a*, *b*) es la traslación de vector:

$$\mathbf{w} = -\mathbf{v} = (-a, -b)$$

Actividades propuestas

22. Traslada una figura (por ejemplo una letra L) mediante la traslación de vector (–4, 5) y repite el proceso con la figura trasladada empleando el vector (3, –6). ¿Qué movimiento utilizas para ir de la primera figura a la última? ¿Es una traslación? ¿Cuál es su vector?

23. El mosaico del margen está confeccionado utilizando un motivo mínimo que se desplaza por todo el mosaico. Si utilizas como motivo mínimo la estrella de seis puntas, sin tener en cuenta los cambios de color, determina los vectores de traslación de dos traslaciones, una horizontal y otra vertical, que mediante composiciones te permitan tener el resto del mosaico. Observa que al sumar la traslación horizontal con la vertical obtienes traslaciones oblicuas. Dibuja en tu cuaderno una figura y trasládala de forma similar para tener un mosaico.

2.5. Traslaciones en el espacio

Las traslaciones en el espacio tienen las mismas propiedades que las traslaciones en el plano.

Imagina un avión que se mueve. El avión se traslada.

Una traslación en el espacio, igual que una traslación en el plano, es el movimiento que consiste en deslizar un objeto según una dirección. La traslación está determinada por la distancia que se traslada, la dirección de la recta sobre la que se traslada, y por su sentido. Por tanto:

Para determinar una traslación en el espacio basta conocer su **vector de traslación**.

La única diferencia es que ahora el vector de traslación tiene tres componentes: *AB* = (*a*, *b*, *c*).

Ejemplo:

- *Para trasladar el punto P* (2, 4, –1) mediante la traslación de vector *AB* = (–3, 5, 2), simplemente sumamos las coordenadas:

$$P' = (2 - 3, 4 + 5, -1 + 2) = (-1, 9, 1).$$

La traslación en el espacio no deja ningún punto invariante.

Actividades propuestas

24. En edificación se utilizan mucho las traslaciones. Piensa en las ventanas de un edificio y elige una. ¿Puedes obtener otra distinta mediante traslación? Haz un dibujo que represente esta situación.

25. En la fachada de esta torre mudéjar de Teruel podemos ver distintas traslaciones. En la parte superior hay dos conjuntos de cuatro ventanitas. Uno es trasladado del otro. Y cada ventanita forma a las otras cuatro mediante una traslación. Al seguir bajando, los dos arcos se trasladan formando otros dos arcos. Observa, en este caso todas las traslaciones tienen un vector de traslación horizontal. Continúa describiendo las traslaciones que ves en el diseño de esta torre.

3. GIROS O ROTACIONES

3.1. Giros en el plano

Son las 4 en punto. Si retrasamos el reloj 15 minutos, la manecilla de los minutos ha girado un ángulo de 90º en sentido positivo.

Para determinar un **giro** o **rotación** es necesario conocer un punto, *O*, el **centro de giro**; un **ángulo** α y el **sentido** de giro de ese ángulo.

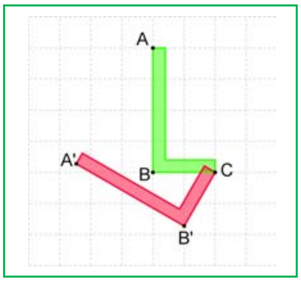
Existe el acuerdo de considerar *positivo* (+) al sentido contrario de las agujas de un reloj y sentido *negativo* (–) el de las agujas del reloj.

Si *A'* es el punto girado de *A*, con centro *O* y ángulo α, entonces: $|OA| = |OA'|$ y el segmento *OA* forma un ángulo α con *OA'*. Para girar una figura se giran los puntos que la forman.

Ejemplo:

- *Si han pasado* 15 minutos la manecilla de los minutos ha girado –90º (90º en sentido negativo), cuando pase media hora habrá girado –180º, y si sólo pasan 10 minutos habrá girado –60º.

Actividades resueltas



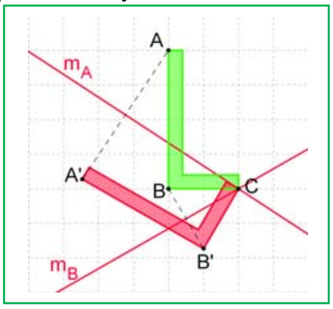
Para dibujar rotaciones en el cuaderno puedes utilizar un transportador de ángulos y un compás.

- *Para girar la letra* L según un giro de centro *C* y ángulo 60º, tomamos varios puntos de la figura, en este caso los puntos *A*, *B* y *C*. Con el compás haciendo centro en *C* trazamos arcos, y sobre ellos, utilizando el transportador, medimos 60º. Obtenemos los puntos *B'* y *A'*.

La nueva letra L mantiene las distancias: *BC* = *B'C* y *AB* = *A'B'*. También mantiene los ángulos: el ángulo *ABC* es recto, y el nuevo ángulo *A'B'C* también es un ángulo recto y con la misma orientación que el anterior. En general:

Los giros mantienen las distancias, por lo que son **isometrías** o movimientos. Mantienen los ángulos y el sentido de los ángulos, por lo que son **movimientos directos**.

Para saber si dos figuras son dos figuras giradas trazamos las mediatrices de los puntos correspondientes y todas ellas deben cortarse en un mismo punto, el centro de giro. Con el trasportador de ángulos podemos entonces medir el ángulo de giro.



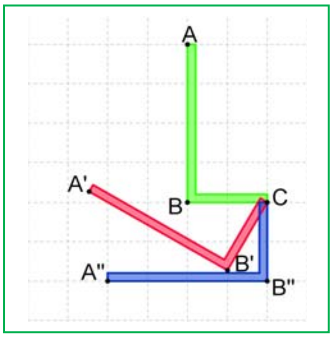
Actividades resueltas

- *Trazamos el segmento BB' y su mediatriz. Trazamos el segmento AA' y su mediatriz. Ambas mediatrices se cortan en el punto C, que es el centro de giro. El ángulo que forman las mediatrices es de* 60º.

Actividades propuestas

26. Dibuja en tu cuaderno un punto *O* y otro punto distinto *A*. Gira al punto *A* con centro en *O* un ángulo de 30º en sentido positivo y denomina *A'* el punto girado.
27. Dibuja en tu cuaderno un punto *O* y dos segmentos, uno *OA* que pase por *O*, y otro *BC* que no pase por *O*. Dibuja los segmentos girados *OA'* y *B'C'* del giro de centro *O* y ángulo 60º.
28. Dibuja en tu cuaderno el triángulo de vértices *A* (4, 2), *B* (3, –2) y *C* (5, 0). Dibuja el triángulo que se obtiene al girarlo con centro en el origen de coordenadas un ángulo de 90º en sentido positivo. ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices *A'*, *B'* y *C'* del triángulo girado?
29. Con ayuda de papel cuadriculado, transforma mediante un giro, una recta, una circunferencia, un segmento, un triángulo, dos rectas paralelas y dos rectas perpendiculares. ¿En qué se transforman? Analiza los resultados.

3.2. Composición de giros. Elementos invariantes.



Ejemplo:

- *Si giramos la letra* L con centro *C*, 60º en sentido positivo y luego, también con centro *C*, 30º en sentido positivo, la figura obtenida está girada respecto a la primera 90º con el mismo centro de giro. En general:

La **composición** de dos giros del mismo centro es otro giro del mismo centro y de ángulo, la suma de los ángulos de giro.

- *Si una vez girada nuestra letra* L 30º en sentido positivo, la giramos, con el mismo centro de giro, 30º en sentido negativo, ¿qué ocurre? En efecto, hemos vuelto a la posición inicial. Se dicen que son giros inversos y que al componerlos tenemos la identidad, ya que no nos movemos.

Un giro de centro *O* y ángulo α es el **giro inverso** al giro del mismo centro *O* y ángulo $-\alpha$.

Observa que la composición de giros de distinto centro no es conmutativa, pues depende del orden en que hagamos los giros.

Actividades resueltas

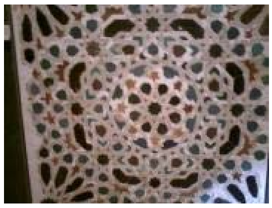
- *Pensemos ahora en qué elementos deja invariantes un giro de centro O y ángulo de giro que no sea 0º ni* 180º. ¿Deja alguna recta invariante? ¿Hay alguna recta del plano que no se mueva? No, todas giran. No hay rectas invariantes. ¿Y puntos? ¿Algún punto del plano no se mueve al girar? Si, el centro de giro queda invariante. El centro de giro se transforma en sí mismo.

En un giro de centro *O* y ángulo distinto de 0º y de 180º, el único elemento **invariante** es un punto, el **centro de giro.**

Centro de giro: Centro de giro es un punto de una figura plana tal que al girar un cierto ángulo, la figura coincide consigo misma.

Observa que el rosetón del centro de este mosaico tiene un **centro de giro** de 60º. Si lo giramos 60º, vuelve a coincidir. También si lo giramos 120º o 180º o 240º o 300º.

3.3. Simetría central en el plano. Centro de simetría



La simetría central de centro *O* en el plano es un giro de ese centro *O* y ángulo 180º. En el plano, la simetría central es, por tanto, un movimiento que ya conocemos. Observa que la simetría central es, por tanto, un movimiento directo.

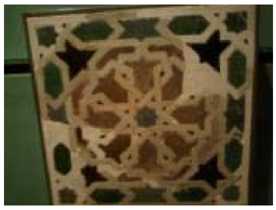
Si *P'* es el simétrico de *P* en la **simetría central** de centro de simetría *O*, entonces, *O* es el punto medio del segmento *PP'*.

Actividades resueltas

- *Dos puntos P y P'* son **simétricos respecto del origen de coordenadas** si tanto sus abscisas como sus ordenadas son opuestas. Así, el simétrico respecto del origen del punto (–2, 4) es el punto (2, –4).
- *Veamos cómo se construye el simétrico, respecto a una simetría central de centro* (2, 3), de un polígono: animación. El simétrico del punto *A* (8, 1) es el punto *A'* (–4, 5). Has visto que se ha trazado la recta *OA*. Con centro en *O* y radio *OA* se traza una arco de circunferencia que corta a la recta *OA* en *A'*. Lo mismo para obtener el simétrico de los otros vértices del polígono. Si los otros vértices son *B* (12, 7), *C* (9, 10), *D* (5, 8) y *E* (7, 6), ¿cuáles son sus simétricos respecto a la simetría central de centro (2, 3)?
- *¿Qué elementos deja invariantes una simetría central? Deja invariante el centro de simetría y todas las rectas que pasan por el centro de giro.*

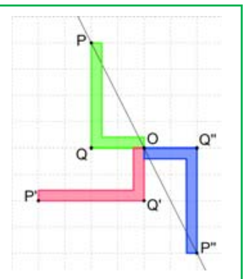
Centro de simetría: Un punto *O* es un centro de simetría de una figura si todo punto de ella tiene como transformado por la simetría central de centro *O*, otro punto de la figura. La simetría central transforma la figura en ella misma.

Ejemplo:



- *El mosaico de la Alhambra del margen tiene simetría central.*
- *El círculo, el cuadrado, el rectángulo tienen centro de simetría, sin embargo, un triángulo nunca tiene centro de simetría.*
- *Los polígonos regulares con un número par de lados tienen centro de simetría.*
- *El pentágono regular, no lo tiene.*

Actividades resueltas



- Aplicamos a la letra L un giro de 90º y luego otro giro también de 90º. La composición de un giro de 90º, con otro del mismo centro y 90º, es un giro de 180º. El punto *P* primero se transforma en *P'* y luego en P''. Si unimos cada punto de la figura con su transformado por la composición de los dos giros, la recta *OP* se transforma en la *OP*", que es la misma recta. Los puntos *Q*, O y *Q''* también están alineados. Las rectas que pasan por el centro de simetría son invariantes.

Actividades propuestas

30. Dibuja en tu cuaderno dos puntos cualesquiera *P* y *P'*. Encuentra su centro de simetría.
31. ¿Qué ocurre al aplicar un giro de 60º a una figura? ¿Hay rectas invariantes? ¿Y en un giro de 180º? Las rectas que pasan por el centro de giro, ¿en qué rectas se transforman? ¿Y con un giro de 0º? ¿Y con un giro de 360º?
32. Dibuja un triángulo *ABC* y su simétrico *A'B'C'* respecto un punto *O*. ¿Cómo son sus lados? ¿Son iguales? ¿Y sus ángulos? ¿Se mantiene el sentido de los ángulos? Comprueba cómo es el ángulo *ABC* y el ángulo *A'B'C'*. ¿Es un movimiento directo?
33. Vamos a analizar las letras mayúsculas. Indica cuáles de las siguientes letras no tienen simetría central y cuáles si la tienen, indicando entonces su centro de simetría: B, H, N, O, P, S, T, X, Z. Recuerda, buscas un punto tal que la simetría central de centro ese punto deje invariante a la letra.

3.4. Giros en el espacio

Al abrir o cerrar una puerta, ésta gira, las patillas de las gafas giran, las ruedas de un coche giran... Observa que para determinar un giro en el espacio necesitas, además del ángulo (y su sentido), conocer el **eje de giro**. Recuerda, en el plano teníamos un centro de giro, un punto, ahora un eje de giro, una recta.

Piensa en otros ejemplos cotidianos de giros en el espacio.

Cuando giras una puerta, ¿cambia el sentido de sus ángulos? Naturalmente que no. Los giros en el espacio son movimientos directos.

- *¿Qué puntos se transforman en sí mismos?* El giro en el espacio deja invariantes a los puntos del eje de giro.

Eje de giro: Eje de giro de una figura, en el espacio, es una recta imaginaria tal, que al girar la figura un cierto ángulo, coincide consigo misma.

3.5. Simetría central en el espacio. Centro de simetría

Una figura tiene simetría central si al unir cada uno de sus puntos con el centro se obtiene otro punto de la figura.

Si *P'* es el simétrico de *P* en la **simetría central** de centro *O*, entonces, *O* es el punto medio del segmento *PP'*.

La simetría central en el espacio no es un giro. Además solo deja un punto invariante, el centro (no una recta)

Centro de simetría: Un punto *O* es un centro de simetría de una figura si todo punto de ella tiene como transformado por la simetría central de centro *O*, otro punto de la figura.

Ejemplos:

- La esfera, el cubo tienen centro de simetría, el tetraedro, no.
- El cilindro tiene centro de simetría. El cono no tiene centro de simetría.
- Un prisma regular tiene centro de simetría. Una pirámide, no.

Actividades propuestas

34. Escribe cinco ejemplos de objetos del espacio que giren.

35. Mediante un giro en el espacio, ¿en qué se transforma un plano? ¿Y una esfera? ¿Y un cono? ¿Y dos planos paralelos? ¿Y dos planos ortogonales? Analiza los resultados.

4. SIMETRÍAS

4.1. Simetrías axiales. Eje de simetría

La mariposa de la figura es simétrica respecto del eje de simetría *r*.

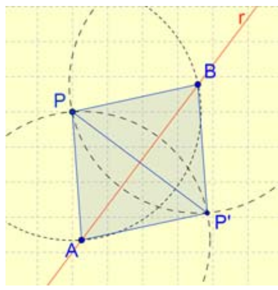
Para determinar una simetría (simetría axial) es necesario conocer el **eje de simetría**.

Si *P'* es el simétrico de *P* respecto de la **simetría axial** de eje *r*, entonces *r* es la **mediatriz** del segmento *PP'*.

La simetría axial conserva todas las longitudes y la magnitud de los ángulos, pero cambia el sentido de estos. Por eso no es posible hacer coincidir una figura con su simétrica (a no ser que las propias figuras sean simétricas).

La simetría es por tanto un movimiento inverso.

Actividades resueltas



- *Para hallar el simétrico del punto P* respecto del eje de simetría *r*, utiliza un compás y haciendo centro en *P* con radio suficientemente grande traza un arco de circunferencia que corte a *r* en dos puntos, *A* y *B*. Sin variar de radio y con centro en *A* y en *B* traza otros dos arcos que se cortan en *P'*, simétrico de *P* respecto a *r*. Observa que *PAP'B* es un rombo pues sus cuatro lados son iguales, por lo que sabemos que sus diagonales son perpendiculares y se cortan en el punto medio.
- *También, utilizando regla y escuadra:* animación: Observa que tenemos el eje de simetría y queremos encontrar el simétrico del punto *P* (4, 1). Dibujamos el punto *P* (4, 1) en un sistema de coordenadas y tomamos la escuadra. Apoyamos la escuadra sobre el eje de simetría y hasta que toque al punto. Trazamos una recta auxiliar, perpendicular al eje y que pase por el punto *P*. Medimos la distancia del punto al eje y llevamos esa longitud sobre la recta auxiliar, y ya tenemos el punto simétrico.
- *También puedes obtener figuras simétricas doblando un papel. El doblez es el eje de simetría. Si dibujas una figura, doblas el papel y la calcas obtienes la figura simétrica.*
- *Otra forma es doblar un papel y recortar una figura: se obtiene una figura simétrica respecto al doblez.*
- *Si dibujamos en papel cuadriculado el triángulo de vértices A* (–3, 2), *B* (–5, 4) y *C* (–4, 7) y hallamos el simétrico respecto al eje de ordenadas, las coordenadas de los vértices del triángulo simétrico son: *A'*(3,2), *B'* (5, 4) y *C'* (4, 7). En general, el simétrico de *P* (*x*, *y*) respecto al eje de ordenadas es *P'* (–*x*, *y*).

Si dibujas el triángulo simétrico de *ABC* respecto al eje de abscisas, observa que las coordenadas de sus vértices son: A' (–3, –2), B' (–5, –4) y C' (–4, –7). En general, el punto simétrico de *P* (*x*, *y*) respecto al eje de abscisas es *P'* (*x*, –*y*).

Dos puntos **simétricos respecto del eje de ordenadas** tienen la misma ordenada y sus abscisas son opuestas. Dos puntos **simétricos respecto del eje de abscisas** tienen la misma abscisa y sus ordenadas son opuestas.

Puntos invariantes:

En una simetría, los puntos del eje de simetría se transforman en sí mismos.

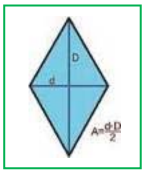
La simetría axial deja invariantes los puntos del eje de simetría. El eje de simetría es una recta invariante de puntos invariantes.

- *¿Qué otros elementos deja invariantes? ¿Hay más puntos? ¿Hay otras rectas?* Observa que las rectas perpendiculares al eje de simetría se transforman en sí mismas.

Actividades propuestas

36. Dibuja en tu cuaderno un eje *r* de simetría oblicuo, y un punto *P*. Dibuja el punto P' simétrico respecto de *r*. Comprueba que la recta *r* es la mediatriz del segmento *PP'*. (*Recuerda*: La mediatriz de un segmento es la perpendicular por el punto medio).
37. Dibuja en tu cuaderno dos puntos cualesquiera *P* y *P'*. Dibuja el eje de simetría *r* respecto al que son simétricos.
38. Dibuja en papel cuadriculado una letra L y un eje de simetría vertical. Dibuja la letra L simétrica respecto a ese eje. Calca una de ellas, y mueve el papel de calco para intentar hacerlas coincidir. Es imposible, porque la simetría es un movimiento inverso.
39. Dibuja en tu cuaderno una figura. Dibuja un eje de simetría oblicuo y dibuja la figura simétrica.
40. Halla las coordenadas de los vértices del triángulo simétrico respecto del eje de ordenadas del triángulo *A* (3, –4), *B* (5, 6), *C* (–4, 5). Lo mismo respecto del eje de abscisas.

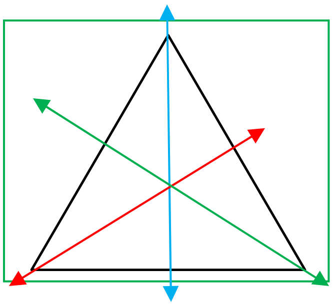
Eje de simetría de una figura:



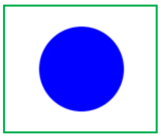
Si la recta *r* es un eje de simetría de una figura entonces todo punto de esa figura tiene como transformado por la simetría de eje *r* a otro punto de dicha figura.

Ejemplos:

- *Un triángulo isósceles tiene un eje de simetría y un triángulo equilátero, tres.*



- *Un rectángulo o un rombo tienen dos ejes de simetría, y un cuadrado cuatro.*
- *Un círculo tiene una infinidad de ejes de simetría (todos sus diámetros).*



Actividades propuestas

41. Indica cuáles de las siguientes letras mayúsculas son simétricas, y si lo son, indica si sus ejes de simetría son horizontales o verticales: A, B, D, F, K, M, N, R, T, U, V, W, Z.
42. Con ayuda de papel cuadriculado, transforma mediante una simetría, una recta, una circunferencia, un segmento, un triángulo, dos rectas paralelas y dos rectas perpendiculares. ¿En qué se transforman? Analiza la respuesta.
43. Dibuja un rectángulo *ABCD*. Dibuja el eje de simetría que transforma *AB* en *CD*, y el eje de simetría que transforma *AD* en *BC*.
44. Dibuja un hexágono regular y dibuja sus ejes de simetría. ¿Cuántos tiene? Tiene 6. Descríbelos.
45. Dibuja un pentágono regular y sus ejes de simetría. ¿Cuántos tiene? Descríbelos.

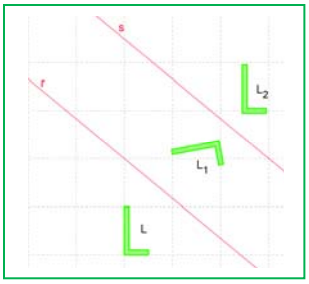
4.2. Composición de simetrías

Vamos a estudiar ahora la composición de simetrías. Ya sabes que una simetría es un movimiento inverso. Si cambias el sentido de un ángulo y luego lo vuelves a cambiar, te queda el sentido original. Por tanto la composición de dos simetrías no va a ser un movimiento inverso sino uno directo.

Veámoslo primero en un caso particular.

Actividades resueltas

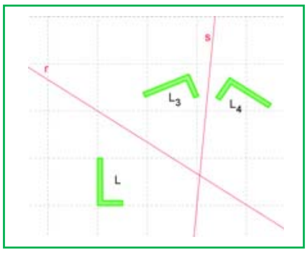
- *Trazamos dos ejes de simetría*, *r* y *s*, paralelos. Dibujamos una letra L, y dibujamos la letra L_1 simétrica de L con respecto de la recta *r*, y después la letra L_2 simétrica de L_1 respecto de la recta *s*. ¿Mediante qué transformación pasamos directamente de L a L_2? ¿Puede ser una simetría? (Observa que sí se pueden superponer L y L_2, luego es un movimiento directo). ¿Es un giro? ¿Es una traslación? Si, es una traslación, ¿de qué vector?



La composición de dos simetrías de ejes paralelos es una traslación. Es la traslación de vector de dirección la recta ortogonal a los ejes de simetría, de módulo el doble de la distancia entre ambos ejes, y de sentido el que va del primer eje al segundo.

La composición de simetrías **no es conmutativa**. Comprueba que si a L primero le aplicamos la simetría de eje *s* y luego la simetría de eje *r* obtenemos una traslación, pero el vector de traslación es el opuesto al del caso anterior.

- *Trazamos ahora dos ejes de simetría secantes, r* y *s*, y una letra L. Dibujamos la letra L_3 simétrica de L con respecto a la recta *r*, y dibujamos la letra L_4 simétrica de L_3 respecto a la recta *s*. ¿Mediante qué transformación pasamos directamente de L a L_4? ¿Puede ser una simetría? (Observa que se pueden superponer L y L_4, luego es un movimiento directo). ¿Es una traslación? ¿Es un giro? Si, es un giro, ¿de qué centro y de qué ángulo?



La composición de dos simetrías de ejes secantes es un giro. Es el giro de centro el punto de intersección de los ejes de simetría, de ángulo doble al que forman ambos ejes y de sentido del ángulo, el que va del primer eje al segundo.

La composición de simetrías **no es conmutativa**. Comprueba que si a L primero le aplicamos la simetría de eje *s* y luego la simetría de eje *r* obtenemos un giro, pero el ángulo de giro es el opuesto al del caso anterior.

Actividades propuestas

46. Reproduce en tu cuaderno la figura P del margen.

a) Dibuja el pájaro P' simétrico respecto al eje de ordenadas.

c) Dibuja el pájaro P'' simétrico respecto al eje de abscisas.

d) ¿Existe alguna simetría axial que trasforme P' en P''? ¿Existe alguna simetría central que transforme P' en P''?

e) Si el pico del pájaro P tuviera unas coordenadas (–2, 5), ¿qué coordenadas tendría el pico del pájaro P'? ¿Y el del pájaro P''?

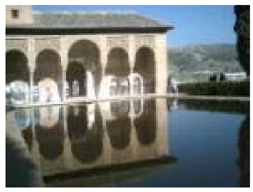
47. Dibuja en tu cuaderno dos ejes de simetría paralelos y una letra F. Dibuja la composición de ambas simetrías a dicha letra, comprobando que la composición de ellas es una traslación y determina el vector de traslación.

48. Dibuja en tu cuaderno dos ejes de simetría secantes y una letra F. Dibuja la composición de ambas simetrías a dicha letra, comprobando que la composición de ellas es un giro y determina el centro y el ángulo de giro.

49. Si aplicamos una simetría a una figura, ¿qué transformación debemos aplicarle para obtener la figura inicial?

50. La composición de dos simetrías planas de ejes secantes es un giro. ¿Cómo deben ser los ejes para que sea un giro de 180 º (o una simetría central)?

4.3. Simetría especular en el espacio. Plano de simetría



Muchos muebles son simétricos: muchas mesas, muchas sillas… Muchos animales son casi simétricos. Los coches, los aviones, los trenes son simétricos. Si nos miramos en un espejo vemos una imagen reflejada que es simétrica a la nuestra. Muchos edificios son casi simétricos o tienen elementos de simetría.

Para determinar una simetría en el espacio es necesario conocer un plano, el **plano de simetría**.

Una simetría en el espacio deja invariantes los puntos pertenecientes al plano de simetría. Deja invariante las rectas ortogonales al plano de simetría, y deja invariante al plano de simetría.

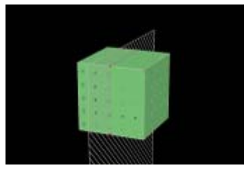
Plano de simetría: El plano de simetría de una figura es un plano imaginario tal, que todo punto de la figura se transforma por la simetría respecto de ese plano en otro punto de dicha figura.

La torre con la puerta del margen tiene un plano de simetría.

Un plano de simetría es como un espejo que refleja exactamente un fragmento de la figura en el otro fragmento.

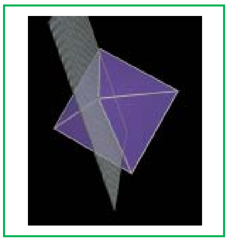
Actividades resueltas

- *Construye poliedros regulares*, con cartulina, con pajitas, con …, para comprobar lo que sigue:

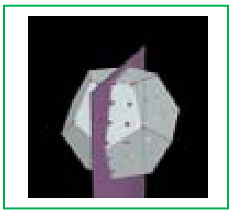


- *Analizamos el plano de simetría del cubo* de la ilustración del margen. Vemos que pasa por los puntos medios de las aristas. ¿Cuántos planos de simetría hay similares a este? Como el cubo tiene 12 aristas y cada plano pasa por 4 hay 3 de este tipo. Otro plano de simetría pasa por una diagonal de una cara, una arista, otra diagonal y otra arista. ¿Cuántos hay de ese otro tipo? Como el cubo tiene 12 aristas y tomamos 2, hay 6 de ese tipo.
- *Busca un eje de giro del cubo.* Observa que tiene un eje de giro de 90º que va de centro de cara a centro de cara. ¿Cuántos ejes de giro tiene de ese tipo? Comprueba que hay 3 (6 caras : 2 = 3). Observa que también hay un eje de giro de 120º que va de vértice a vértice opuesto. ¿Cuántos hay de ese otro tipo? Como el cubo tiene 8 vértices hay 4 de este tipo. Observa que también hay un eje de giro de 180º que va de centro de arista a centro de arista opuesta. ¿Cuántos hay de ese otro tipo? Como el cubo tiene 12 aristas, hay 6 de ese tipo. ¿Hay simetría central? Observa que sí.
- *Vamos a analizar ahora las isometrías de un octaedro.* Observa que tiene centro de simetría, igual que el cubo. Planos de simetría: Hay planos, como el de la figura, que pasan por cuatro aristas. Como tiene 12 aristas hay 3 de este tipo. También hay planos que pasan por el eje de simetría de las caras. ¿Cuántos hay? ¿Tenemos el mismo número de planos

de simetría que en el cubo? Sí. El cubo y el octaedro son duales. Si en el cubo fijamos los centros de las caras y los unimos, tenemos un octaedro. Y si en el octaedro unimos los centros de las caras, tenemos un cubo. Observa que el número de caras de un cubo, 6, coincide con el número de vértices de un octaedro, y que el número de caras de un octaedro, 8, coincide con el número de vértices del cubo. Y ambos tienen el mismo número de aristas, 12.



- *Buscamos ahora ejes de giro en un octaedro.* ¿Tiene ejes de giro de 90º? Si, van de vértice a vértice opuesto. Hay 6 vértices, luego hay 3 ejes de giro de este tipo. ¿Hay ejes de giro de 120º, como en el cubo? Naturalmente, van de centro de cara a centro de cara, y como tiene 8 caras, hay 4 de este tipo. ¿Y los ejes de giro de 180º? Van, como en el cubo, de centro de arista a centro de arista, y hay 6.
- *El estudio de tetraedro es más sencillo.* Comprueba que NO tiene centro de simetría. Los planos de simetría pasan por una arista, el eje de simetría de una cara y el eje de simetría de otra. Hay 6 aristas, luego hay 6 de este tipo. Tiene ejes de giro de 120º. Pasan por un vértice y el centro de la cara opuesta. Como tiene 4 caras hay 4 de este tipo.

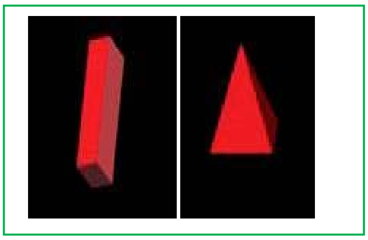


- *El estudio del dodecaedro y del icosaedro es más complicado.* Observa que también son duales. Si unimos los centros de las caras de un dodecaedro se obtiene un icosaedro, y si unimos los centros de las caras de un icosaedro, se obtiene un dodecaedro. El dodecaedro tiene 12 caras y el icosaedro 12 vértices. El icosaedro tiene 20 caras y el dodecaedro 20 vértices. Ambos tienen 30 aristas. Vamos a describir el plano de simetría del dodecaedro de la figura del margen: Vemos que pasa por los dos ejes de simetría de dos caras, por una arista. ¿Y luego? ¿Ya no lo vemos? Observa que vuelve a pasar por dos ejes de simetría de caras y por otra arista. Como el dodecaedro tiene 20 aristas, hay 10 planos de simetría de este tipo.

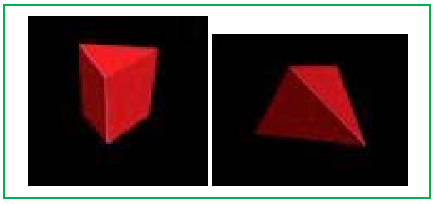
Actividades propuestas

51. Escribe cinco objetos que estén a tu alrededor que sean simétricos e indica su plano de simetría. Mira en el aula y busca simetrías. ¿Son simétricas las sillas, la lámpara, la ventana, las mesas...? ¿Cuál es su plano de simetría?

52. Define los planos de simetría y los ejes de rotación de las siguientes figuras:



a) Un prisma recto de base cuadrada. ¿Y si es oblicuo?
b) Una pirámide recta de base cuadrada.
c) Si el prisma y la pirámide son rectos, pero sus bases son rectángulos, ¿qué simetrías se mantienen?



53. Determina los planos de simetría y los ejes de rotación de estas figuras:
a) Un prisma recto cuya base es un triángulo equilátero.
b) Una pirámide recta de base un triangulo equilátero. ¿Y si es oblicua?
c) Si el prisma y la pirámide son rectos pero de base un triángulo isósceles, ¿qué simetrías se mantienen?

54. Mediante una simetría especular, ¿en qué se transforma un plano? ¿Y una esfera? ¿Y un cono? ¿Y dos planos paralelos? ¿Y dos planos ortogonales? Analiza los resultados.

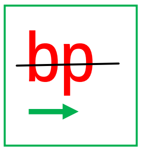
4.4. Isometrías en el plano

Las **isometrías** son trasformaciones geométricas que conservan las distancias y los ángulos.

En el plano hemos estudiado las traslaciones, los giros y las simetrías (axiales) que son isometrías.

Ya sabemos que la simetría central en el plano coincide con un caso particular de giro, el giro de 180º.

Los giros y las traslaciones son isometrías directas, pues no cambian el sentido de los ángulos. Las simetrías son isometrías inversas pues sí los cambian.



Hemos visto que la composición de dos traslaciones es siempre otra traslación, que la composición de dos giros del mismo centro es otro giro de igual centro, que la composición de dos simetrías es un giro o una traslación. Podríamos seguir estudiando qué ocurre si componemos giros de distinto centro, giros con traslaciones, traslaciones con simetrías y simetrías con giros. Veríamos que casi siempre obteníamos una simetría, una traslación o un giro. Salvo cuando componemos una traslación con una simetría. Obtenemos una isometría nueva que llamaremos **simetría con deslizamiento**. Pasamos de la letra b del margen a la letra p por una simetría de eje horizontal (en negro) y una traslación (de vector de traslación en verde).

Puntos invariantes: La traslación no deja ningún punto invariante. Los giros dejan uno, el centro de giro, y la simetría axial deja una recta, el eje de simetría. La simetría con deslizamiento tampoco deja ningún punto invariante.

Si en un plano una isometría deja tres puntos invariantes no alineados, entonces deja invariante todo el plano, luego es la identidad.

En el plano			
	Puntos invariantes	Rectas de puntos invariantes	Rectas invariantes
Traslación	Ninguno	Ninguna	Las de dirección igual a la del vector de traslación
Giros (de ángulo de giro distinto a 180º y 0º)	Centro de giro	Ninguna	Ninguna
Simetría (axial)	Los del eje de simetría	El eje de simetría	El eje de simetría y las rectas ortogonales al eje de simetría.
Identidad	Todo el plano	Todas	Todas
Simetría con deslizamiento	Ninguno	Ninguna	Las de dirección igual al vector de traslación y del eje de simetría.

4.5. Uso de Geogebra para analizar las isometrías en el plano

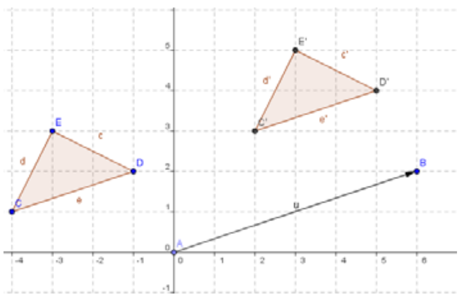
Vamos a utilizar el programa **Geogebra** para estudiar los movimientos en el plano. Estudiaremos las traslaciones y la simetría axial.

Actividades resueltas

Traslación

- *Utiliza Geogebra para estudiar vectores y traslaciones.*

- En un archivo de *Geogebra* **Visualiza** los ejes, la cuadrícula y la ventana algebraica.
- Con la herramienta **Nuevo Punto** define el origen de coordenadas como *A* y el punto de coordenadas (6, 2) como *B.* y con la herramienta **Vector entre dos puntos** determina el vector *u* de origen *A* y extremo *B* que tendrá coordenadas (6, 2).
- Define con **Nuevo Punto** *C* (–4, 1), *D* (–1, 2) y *E* (–3, 3) y con **Polígono** dibuja el triángulo que tiene por vértices estos puntos.
  - Observa que los puntos que has dibujado aparecen en la ventana algebraica como objetos libres y el triángulo como objeto dependiente.
- Utiliza la herramienta **Trasladar objeto acorde a vector** para trasladar el triángulo *CDE* según el vector *u*, se obtiene el triángulo *C'D'E'*.



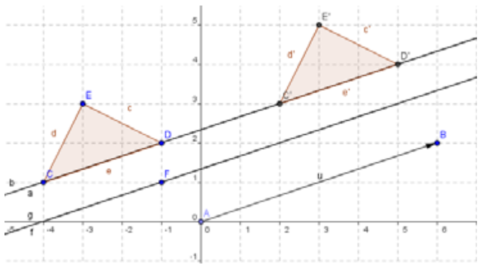
55. ¿Qué tipo de cuadriláteros son los polígonos *ACC'B, ADD'B y AEE'B*?

56. Comprueba en la ventana algebraica que:

a) Las coordenadas de los puntos *C', D' y E'* se obtienen respectivamente al sumar a las coordenadas de los puntos *C, D, y E* las coordenadas del vector *u.*

b) La longitud de cada lado del triángulo es la misma que la de su trasladado y las áreas de los triángulo *CDE* y *C'D'E'* coinciden

- Dibuja con **Recta que pasa por 2 puntos**, la recta *a* que pasa por los puntos por *C* y *D* y comprueba, con la ecuación de la recta, que *C'* y *D'* están en la misma recta.
- Traslada ahora la recta *a* según el vector *u*, aparece, denominada *b*, la misma recta.
  - *¿Qué propiedad tiene la recta a para que permanezca invariante mediante la traslación? Una conjetura es que la recta a es paralela al vector u.*
- Para comprobar la conjetura define un **Nuevo Punto** *F* (-1, 1) y con **Recta paralela** dibuja una recta *f* que pase por *F* y paralela al vector *u*.
- Traslada la recta *f* según el vector *u* y verás que aparece la recta *g* que coincide con ella. Dibuja otras rectas paralelas al vector u y comprueba que la traslación las deja invariantes.
- Mueve con el puntero el punto *B*, para que el vector *u* tenga distinta dirección y observa como la recta *a* ya no tiene la misma dirección que el vector *u* y su trasladada, la recta *b*, es distinta y paralela a ella, sin embargo la recta *f* tiene la misma dirección que el vector *u* y su trasladada *g* coincide con ella.



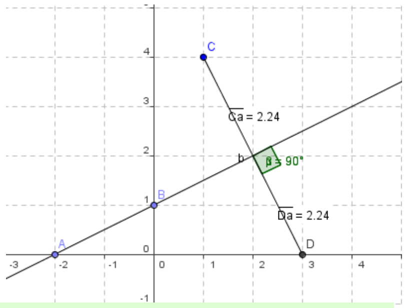
57. Investiga si algún punto del plano permanece invariante mediante traslaciones según diferentes vectores.

Simetría axial

- *Utiliza Geogebra para estudiar las propiedades de la simetría axial.*

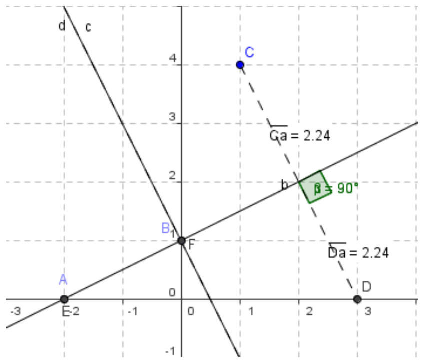
- Abre una nueva ventana de *Geogebra* y visualiza los ejes, la cuadrícula y la ventana algebraica.
- Con la herramienta **Nuevo Punto** define *A* (-2, 0) y *B* (0, 1) y con **Recta que pasa por 2 puntos**, dibuja la recta *a* que pasa

por *A* y *B*, que será el eje de simetría.



- Determina el punto *C* (1, 4) y con la herramienta **Refleja objeto en recta**, su simétrico con respecto a la recta *a*, que es el punto *D* (3, 0).
- Con la herramienta **Distancia** comprueba que la distancia del punto *C* a la recta *a* coincide con la del punto *D* a dicha recta.
- Dibuja con **Segmento entre dos puntos** el que une los puntos *C* y *D*.
- Con la herramienta **Angulo** calcula la medida del ángulo que forman el segmento *CD* y la recta *a* para verificar que son perpendiculares.

Las siguientes propiedades, que acabas de comprobar, caracterizan la simetría axial:
1ª: Las distancias de un punto y de su simétrico al eje de simetría coinciden.
2ª: El segmento que une un punto y su simétrico es perpendicular al eje de simetría.



- Con la herramienta **Refleja objeto en recta** halla el simétrico de los puntos *A* y *B* con respecto al eje *a* y comprueba que *A* y su simétrico de *E* coinciden lo mismo que *B* y *F*. Prueba con otros puntos de la recta *a* para verificar que todos los puntos del eje resultan invariantes mediante una simetría axial con respecto a este eje. Verifica, también, que el eje, la recta *a*, y su simétrica la recta *b* coinciden.
- Utiliza **Recta perpendicular** para trazar la recta *c*, perpendicular al eje *a* que pasa por el punto *B*.
- Calcula la recta simétrica de la recta *c* con respecto al eje *a*, se obtiene la recta *d* que coincide con *c*.
- Mejora el aspecto de la construcción dibujando el segmento CD y las rectas *c* y *d* con trazo discontinuo. Haz clic con el botón derecho del ratón sobre el elemento o su ecuación y en **Propiedades**, **Estilo**, elige un trazo discontinuo.

58. ¿Cuáles son los puntos invariantes de una simetría axial? ¿Y las rectas invariantes?

Actividades propuestas

59. Utiliza la herramienta **Rota objeto en torno a un punto, el ángulo indicado** para estudiar los giros en el plano. Define un punto *O* como centro de giro, por ejemplo, el centro de coordenadas. Define tres puntos para determinar con **Angulo** uno de 45º.

a) Dibuja rectas y polígonos y observa como se transforman mediante este giro.
b) Investiga si al realizar un giro existen puntos y/o rectas que permanecen invariantes.

60. Utiliza la herramienta **Refleja objeto por punto** para estudiar la simetría central. Define un punto *O* como centro de simetria, por ejemplo, el centro de coordenadas.

a) Dibuja rectas y polígonos y observa como se transforman por una simetría central.
b) Comprueba que una simetría central equivale a un giro de 180º.
c) Investiga si en una simetría central hay puntos y/o rectas que permanecen invariantes.

4.6. Isometrías en el espacio

En el espacio hemos estudiado las traslaciones, los giros, las simetrías centrales y las simetrías (especulares). La simetría central es un movimiento nuevo diferente de los giros.

En el espacio, traslaciones y giros son isometrías directas, y simetrías especulares y simetrías centrales son isometrías inversas.

No hemos estudiado su composición, pero no nos costaría nada ver que la composición de dos traslaciones es otra traslación, de vector, la suma de los vectores de traslación. La composición de dos giros del mismo eje es otro giro del mismo eje y de ángulo, la suma de los ángulos. La composición de dos simetrías de planos paralelos es una traslación, y la composición de dos simetrías de planos secantes es un giro de eje, la recta de intersección de los planos. La composición de dos simetrías centrales del mismo centro es la identidad. El comportamiento de estas composiciones es similar a lo que ocurre en el plano.

Más complicado es estudiar en el espacio la composición de giros de distinto eje, giros con simetrías, simetrías con traslaciones y traslaciones con giros en el espacio. Igual que en el plano aparecieron nuevas isometrías, la simetría con deslizamiento, ahora también nos aparecen nuevas isometrías: simetría rotativa, simetría con deslizamiento…

Puntos invariantes: La **traslación** no deja **ningún** punto invariante. La **simetría central** deja **un** punto invariante, el centro. Los **giros** dejan una **recta**, el eje de giro. La **simetría** especular deja un **plano** de puntos invariantes, el plano de simetría. Y si una isometría en el espacio deja cuatro puntos invariantes no coplanarios, es la identidad.

5. MOSAICOS, FRISOS Y ROSETONES

Al pasear por una ciudad o por el campo puedes ver montones de transformaciones geométricas: verás simetrías, giros y traslaciones por doquier, formando mosaicos, frisos o rosetones; o bien en las formas de las flores

5.1. Mosaicos

61. Mira este azulejo de un mosaico de Estambul. La celda unidad es cada uno de los azulejos con la que se construye todo el mosaico mediante traslaciones. Indica los vectores de traslación. Pero puedes reducir el motivo mínimo. ¿Utilizando giros? ¿Utilizando simetrías? Mira la ampliación: Comprueba que puedes utilizar como motivo mínimo la octava parte del azulejo.

62. **Análisis de mosaicos de la Alhambra**: Observa el mosaico del margen. Imagina que es infinito, que completa todo el plano. Puedes tomar como motivo mínimo un par de hojitas. Para pasar de un par de hojitas al otro par adyacente, ¿qué trasformación has utilizado? ¿Es una simetría? ¿Es un giro? ¿Hay centros de giro de 60º? ¿Y de 80º? ¿Y de 30º?

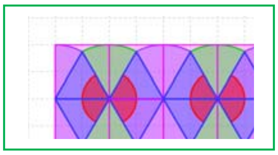
63. Utiliza una trama de triángulos, o dibuja una en tu cuaderno, para diseñar un mosaico parecido a este. Marca en la trama los centros de giros de 60º, de 180º y de 30º. Dibuja un motivo mínimo sencillito, por ejemplo una poligonal o una hoja, y muévelo usando esas transformaciones.

64. Generación de un mosaico mediante giros y traslaciones: animación. Observa cómo primero dibuja una trama de cuadrados, dibuja un motivo mínimo formado por dos segmentos, luego le aplica isometrías a ese motivo: giros de 90º, con los que dibuja la estrella, que por simetría completa la celda unidad a la que por último la traslada por todo el mosaico.

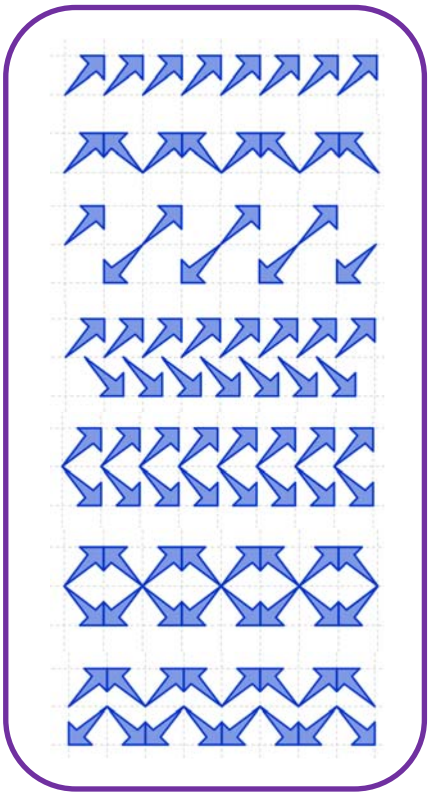
65. También puedes ver en la siguiente animación cómo se realiza un estudio del mosaico del margen, buscando la celda unidad, el motivo mínimo y estudiando sus giros (de 90º y 180º) y sus ejes de simetría.

66. Utiliza una trama de cuadrados, o dibuja una en tu cuaderno, para diseñar un mosaico parecido a este. Marca en la trama los centros de giros de 90º y de 180º. Marca los ejes de simetría. Dibuja un motivo mínimo sencillito, por ejemplo una poligonal, y muévelo usando esas transformaciones. Completa primero la celda unidad, y luego trasládala.

5.2. Frisos



Las puntillas, las grecas de los bordados, las telas estampadas, las rejas... utilizan muy a menudo las traslaciones en sus diseños. Son los frisos.



Observa el friso del margen. Como todos los frisos se obtiene trasladando un motivo. Pero pueden tener otras isometrías además de la traslación. La combinación de traslación, simetrías y giros permiten obtener siete tipos de frisos diferentes.

67. Hemos formado frisos utilizando las letras del alfabeto. Todos ellos se forman por traslación. Pero en ocasiones hay otras isometrías. A) ¿En cuáles hay una simetría de eje horizontal. B) ¿En cuáles hay giros de 180º. C) ¿En cuáles hay simetrías de eje vertical? D) ¿Hay simetrías con deslizamiento? E) Señala todas las familias de simetrías respecto a un eje, de giros y de traslaciones por las cuales un punto del friso se transforma en otro punto del mismo (supuesto que se prolongue hasta el infinito).

L1. LLLLL, L2. NNNNN, L3. VVVVV, L4. CCCCC, L5. HHHHH, L6. pbpbpb, L7. pqdbpqdbp

68. Sal a la calle o en tu casa y busca frisos. Fotografía rejas, mira puntillas y grecas… y haz un estudio de los diferentes frisos que encuentres. Dibuja en tu cuaderno su diseño e intenta clasificarlos según el esquema de las letras del problema anterior, según las transformaciones que utilicen. Para ello hazte las siguientes preguntas: 1) ¿Tiene giros? Si la respuesta es NO, entonces: 2) ¿Tiene simetría horizontal? Si la respuesta es SI, es un L4, que como el friso formado por la letra C o la letra D, no tiene giros y si, simetría de eje horizontal. Si la respuesta es NO, entonces: 3) ¿Tiene simetría vertical? Si la respuesta es SI, es un L3, como el friso formado por la letra V o la letra A, que no tiene ni giros, ni simetría horizontal y si simetría vertical. Si la respuesta es NO, entonces: 4) ¿Tiene simetría con deslizamiento? Si lo tiene es un L6, y si no es un L1. Pero si tiene giros puede tener

también simetría horizontal y es un L5, o tener simetría con deslizamiento y ser un L7, o sólo tener el giro y ser un L2, como el friso formado por la letra N o la letra S.

69. En los frisos siguientes señala todas las familias de simetrías respecto a un eje, de giros y de traslaciones por las cuales un punto del friso se transforma en otro punto del mismo (supuesto que se prolongue hasta el infinito).

5.3. Rosetones

Los rosetones de las catedrales son espectaculares, pero también se pueden ver en situaciones más cotidianas, como los tapacubos de los coches.

Se denominan grupos de Leonardo a los grupos de isometrías de estos rosetones. Pueden tener simetrías o únicamente giros. Este rosetón de una catedral tiene ejes de simetría y divide la circunferencia en 12 trozos iguales. Decimos que es un D12. Si no hay simetrías, sólo giros decimos que es un C5, o un C6… según divida a la circunferencia en 5 o en 6… partes iguales.

Por ejemplo, ¿te has fijado en los tapacubos de los coches? En ocasiones tienen diseños interesantes. Hemos recogido fotografías de algunos tapacubos para que los estudies.

70. Análisis de tapacubos: Observa los siguientes tapacubos. Indica, para cada uno de ellos, las siguientes cuestiones:

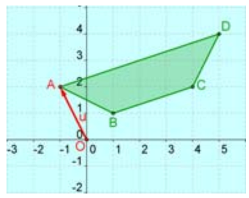
 1	 2	 3	 4	 5	 6
 7	 8	 9	 10	 11	 12

a) Tiene simetría central.
b) Tiene ejes de simetría axial. ¿Cuántos?
c) Tiene centro de giro, ¿cuál es el menor ángulo de giro que lo deja invariante?
d) Sal a la calle y fotografía o dibuja los tapacubos que veas y te parezcan interesantes. Haz un estudio de ellos.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

Traslación

1. Dibuja en tu cuaderno un paralelogramo sobre un sistema de referencia y una cuadrícula. Tienes cuatro segmentos orientados. Determina las coordenadas de los vectores sobre dichos segmentos. ¿Cuáles tienen las mismas coordenadas?
2. Tenemos los puntos *A* (0, 5), *B* (3, 6), *C* (4, -2) y *D* (7, 3). Calcula las coordenadas de los vectores *AB*; *AC*; *AD*; *BC*; *BD*; *CD*; *DC*; *BA*.
3. Determina el vector de traslación que traslada el punto *A* (3, 7) al punto *A'* (1, 5).
4. Por la traslación de vector **u** = (2, 8) se traslada el punto *A* (9, 4) al punto *A'*. ¿Cuáles son las coordenadas de *A'*?
5. Por la traslación de vector **u** = (–3, –1) se traslada el punto *A* al punto *A'* (3, 3). ¿Cuáles son las coordenadas de *A*?
6. Trasladamos la circunferencia de centro *C* (5, 2) y radio 3 unidades con la traslación de vector **u** = (–5, –2). Determina el centro y el radio de la circunferencia trasladada.
7. Dibuja en tu cuaderno unos ejes coordenados y en ellos un cuadrado de lado 2 unidades al que llamas *C*, le aplicas una traslación según el vector ***u*** = (4, 1) y llamas *C*' a su trasladado. Ahora aplicas a *C'* una traslación según el vector ***v*** = (–2, 4). La isometría que transforma *C* en *C*'', ¿es una traslación? Escribe las coordenadas de su vector. Mediante esa traslación, ¿en qué punto se transforma el origen de coordenadas?
8. El vértice inferior izquierdo de un cuadrado es A (3, 1) y el vértice superior izquierdo es B (1, 3). Le aplicas una traslación de vector ***u*** = (–2, 4), ¿cuáles son las coordenadas de los cuatro vértices del cuadrado transformado?
9. Dibuja la imagen que resulta de aplicar al trapecio de la figura la traslación de vector *OA* = (–1, 2). Determina las coordenadas de los puntos transformados de *A* (–1, 2), *B* (1, 1), *C* (4, 2) y *D* (5, 4) por dicha traslación.

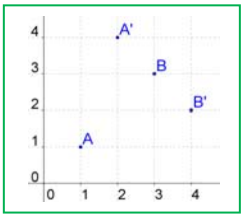


10. Aplica la traslación de vector ***u*** = (–3, 4) al triángulo *ABC* de vértices *A* (3, 1), *B* (4, 4), *C* (6, 5), y calcula las coordenadas del triángulo transformado.

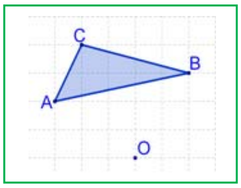
11. Dibuja en tu cuaderno un círculo de centro el origen y radio 2 unidades.
    a) Trasládalo con la traslación de vector **u** = (3, 0).
    b) Trasládalo después mediante la traslación de vector **v** = (0, 4).
    c) Indica las coordenadas del centro del segundo círculo trasladado.
    d) Indica las coordenadas del trasladado del punto (0, 2) al aplicarle cada una de las dos traslaciones.
12. Trasladamos el triángulo *ABC* de vértices *A* (6, 1), *B* (–3, 4) y *C* (0, 8), mediante la traslación de vector **u** = (7, 1), y luego mediante la traslación de vector **v** = (2, 8). Determina las coordenadas del triángulo transformado analítica y gráficamente.
13. La composición de dos traslaciones tiene por vector (5, 9). Si una de ellas es la traslación de vector **u** = (7, 3), ¿qué componentes tiene el otro vector de traslación?
14. a) Dibuja en tu cuaderno un triángulo *ABC* y trasládalo 5 cm a la derecha. Denomina *A'B'C'* al triángulo obtenido.
    b) Traslada *A'B'C'* ahora 4 cm hacia arriba y denomina *A''B''C''* al nuevo triángulo.
    c) Dibuja el vector que permite pasar directamente del triángulo *ABC* al *A''B''C''* y mide su longitud. ¿Cuáles son sus coordenadas?
15. Determina el vector de traslación de la traslación inversa a la de vector ***u*** = (–2, 5).
16. a) Dibuja en tu cuaderno una figura, y repite el dibujo trasladando la figura 4 veces con la misma traslación. Al hacerlo, dibujarás un friso.
    b) Un friso confeccionado con letras L es: L L L L L. Dibuja un friso confeccionado con letras J. Otro confeccionado con letras M. Además de traslación, ¿tiene simetrías?
    c) Busca un friso. Mira las rejas de tu calle, un bordado o una puntilla, las grecas de unos azulejos… y dibuja su diseño en tu cuaderno.
17. Mediante una traslación en el espacio, ¿en qué se transforma un plano? ¿Y una esfera? ¿Y un cono? ¿Y dos planos paralelos? ¿Y dos planos ortogonales? Analiza los resultados.

Giros

18. Dibuja en tu cuaderno el punto *A* (5, 4). Indica las coordenadas del punto *A'* que se obtiene al girar 180º y con centro el origen el punto *A*. Indica las coordenadas del punto *A''* obtenido al girar *A'* 90º con el mismo centro de giro.
19. Dibuja una figura en tu cuaderno, cálcala, recórtala y pégala inclinada al lado de la inicial. Las dos figuras, ¿tienen todas las longitudes iguales?, ¿y sus ángulos? Determina, con compás y transportador, el centro y el ángulo de giro.
20. Dibuja en tu cuaderno una letra F y la letra F girada 30º con centro de giro su punto más inferior.
21. Dibuja en tu cuaderno un triángulo rectángulo isósceles y con centro en el vértice de uno de los ángulos agudos aplícale un giro de 45º en sentido positivo. Luego aplícale otro giro de 45º, y así sucesivamente hasta llegar al triángulo inicial. ¿Qué giros has estado haciendo?
22. Dibuja en tu cuaderno un círculo de centro *O*, dos diámetros perpendiculares *AB* y *CD* y una cuerda *CB*. Sobre el mismo dibujo traza las figuras obtenidas haciendo girar la figura formada por los dos diámetros y la cuerda, con giros de centro *O* y ángulos 45º, 90º, 135º, 180º, 225º, 270º y 315º. Habrás hecho la composición de giros de 45º varias veces.
23. ¿La letra H tiene centro de simetría? Indica tres objetos cotidianos que tengan simetría central.
24. Sobre unos ejes cartesianos representa los puntos *A* (2, 6), *B* (–2, 5), *C* (5, 3) y sus simétricos respecto al origen *A', B'* y *C'*. ¿Qué coordenadas tienen *A'*, *B'* y *C'*?
25. Dibuja en tu cuaderno el triángulo de vértices *A* (3, 7), *B* (5, –5) y *C* (7, 2). Dibuja el triángulo que se obtiene al girarlo con centro en el punto *D* (8, 8) un ángulo de 180º. Es una simetría central. ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices *A'*, *B'* y *C'* del nuevo triángulo?
26. Dibuja en un sistema de referencia un punto *P* y su simétrico *P'* respecto del origen. Si las coordenadas de *P* son (*x*, *y*), ¿cuáles son las de *P'*?
27. Dado el triángulo *A*(3, –4), *B* (5, 6), *C* (–4, 5), halla las coordenadas de los vértices del triángulo simétrico respecto del origen.
28. Dibuja un triángulo equilátero *ABC* y con centro en el vértice *A* aplícale un giro de ángulo 60º. El triángulo dado y el transformado, ¿qué figura forman? Vuelve a aplicar al triángulo trasformado el mismo giro de centro *A*, ¿qué giros has estado haciendo? ¿Cuántos giros debes aplicar al triángulo inicial para que vuelva a ocupar la posición inicial?



29. Dibuja en tu cuaderno los cuatro puntos de la figura. Determina, con regla, compás y transportador, el centro y el ángulo de giro sabiendo que los puntos *A* y *B* se han transformado mediante un giro en *A'* y *B'*.



30. Dibuja la imagen que resulta de aplicar al triángulo de la figura el giro de centro *O* que transforma el punto *A* en el punto *B*.
31. Utiliza un transportador de ángulos, regla y compás, para girar una recta 60º respecto a un punto *O* exterior a ella (es suficiente girar dos puntos de dicha recta). Mide los ángulos que forman las dos rectas, la inicial y la girada. ¿Observas alguna regularidad? Investiga un método para girar una

recta transformando un solo punto. ¿Qué punto debes elegir y por qué?

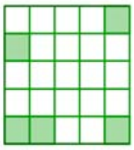
32. Juego para dos jugadores: Forma sobre la mesa un polígono regular utilizando monedas (o fichas o bolitas de papel) como vértices. Alternativamente cada jugador retira o una moneda o dos monedas adyacentes. Gana quien retire la última moneda. (*Ayuda*: Es un juego de estrategia ganadora que puedes descubrir utilizando la simetría central).

33. En el diseño de este mosaico se han utilizado giros en el plano. No lo vemos completo, pero podemos imaginar que fuera infinito. Indica los centros de giro que veas. En el centro de la figura hay un centro de giro clarísimo, ¿de qué ángulo? ¿Hay giros de 45º? ¿Cuáles son sus centros de giro? ¿Hay centros de simetría? Indícalos.

34. Para cada uno de los siguientes polígonos indica el centro de giro y el mínimo ángulo de giro que dejan invariantes a cada uno de ellos:

a) Pentágono regular	b) Hexágono regular	c) Decágono regular
d) Triángulo equilátero	e) Rectángulo	f) Cuadrado
g) Rombo	h) Paralelepípedo	i) Octógono regular

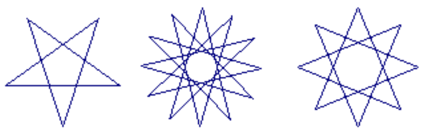
35. Indica si el mosaico de la Alhambra del margen tiene centro de giro, y determina cuál es el menor ángulo de giro que hace que el mosaico se superponga (sin tener en cuenta los cambios de color). ¿Hay centros de simetría?



36. Con ayuda de papel cuadriculado transforma mediante una simetría central, una recta, una circunferencia, un segmento, un triángulo, dos rectas paralelas y dos rectas perpendiculares. ¿En qué se transforman? Analiza los resultados.

37. ¿Qué número mínimo de cuadrados es necesario pintar de verde para que el cuadrado grande tenga un centro de simetría?

38. Hemos girado el punto *A* (3, 5) y hemos obtenido el punto *A'* (7, –2). Determina el centro de giro y el ángulo utilizando regla, compás y trasportador de ángulos.



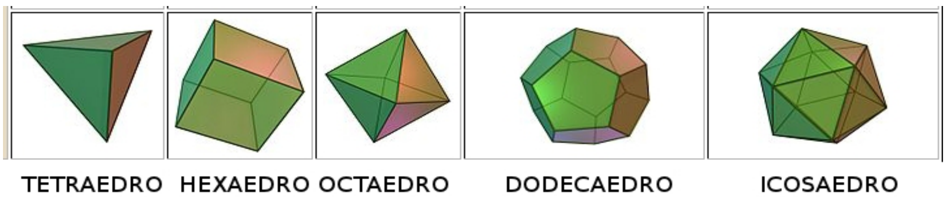
39. ¿Cuáles de los polígonos estrellados de la figura del margen tienen centro de simetría? Indica el centro de giro y el mínimo ángulo de giro que deja invariantes a cada uno de ellos.

40. Determina tres objetos cotidianos que tengan algún eje de giro.

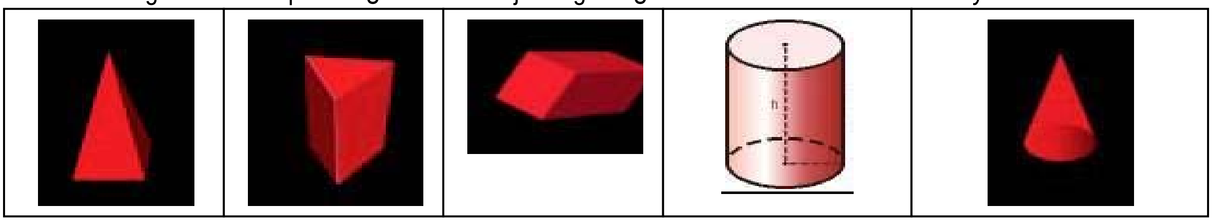
41. En la simetría central de centro (2, 3) hemos visto que el simétrico del punto *A* (8, 1) es el punto *A'* (–4, 5). Calcula los simétricos de los puntos *B* (12, 7), *C* (9, 10), *D* (5, 8) y *E* (7, 6).

42. Observa esta torre mudéjar de Teruel. Está diseñada utilizando giros en el espacio. ¿Cuál es su eje de giro? ¿Y el ángulo de giro?

43. Piensa en los cinco poliedros regulares. Unos tienen simetría central en el espacio, otros no. ¿Cuáles la tienen?



44. Piensa ahora en los siguientes cuerpos geométricos: Una pirámide cuadrangular regular, un prisma triangular regular, un prisma romboidal oblicuo, un cilindro y un cono. ¿Cuáles pueden formarse mediante giros en el espacio? ¿Cuál es su eje de giro? ¿Cuáles tienen simetría central y cuáles no?



Simetrías

45. Dibuja en tu cuaderno un sistema de referencia y una letra B. Dibuja la letra simétrica de B respecto del eje de abscisas y respecto del eje de ordenadas.

46. Clasifica las letras mayúsculas del alfabeto, a) en las que son simétricas respecto de un eje de simetría horizontal y un eje de simetría vertical. b) en las que sólo son simétricas respecto de un eje de simetría vertical, c) en las que sólo lo son respecto del eje de simetría horizontal, y d) en las que no tienen ningún eje de simetría. e) Comprueba que las letras que tienen dos ejes de simetría tienen centro de simetría. La razón ya la sabes: La composición de dos simetrías de ejes

secantes es un giro.

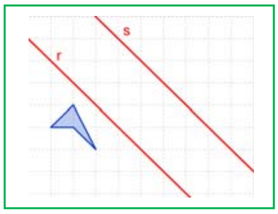
47. ¿Cuáles de las siguientes sucesiones de letras tienen un único eje de simetría? ¿Cuáles tiene dos ejes? ¿Cuáles ninguno? ¿Cuáles tienen centro de simetría?

a) ONO b) NON c) DODO d) OIO e) HEMO f) HOOH

48. Indica los ejes de simetría de las siguientes figuras:

a) Cuadrado. b) Triángulo equilátero. c) Trapecio isósceles. d) Hexágono.
e) Circunferencia. f) Rectángulo. g) Rombo. h) Pentágono.

49. Considera que los vértices del cuadrilátero de la figura tienen de coordenadas: (1, 3), (2, 3), (3, 2) y (2, 4). Aplícale dos simetrías axiales de ejes paralelos, la primera respecto al eje *r* y la segunda respecto al eje *s*.



a) Indica las coordenadas de los vértices de las figuras transformadas por dicha composición de simetrías.

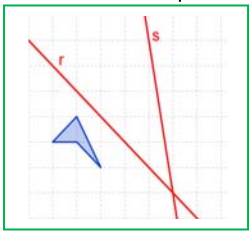
Si llamamos *C* al cuadrilátero inicial, *C'* a su simétrico respecto al eje *r* y *C''* al simétrico de *C'* respecto al eje *s*:

b) ¿Qué isometría nos permite trasformar directamente *C* en *C''*.

c) ¿Qué elementos la definen?

d) ¿Qué ocurre si aplicamos las dos simetrías en distinto orden, primero respecto al eje *s* y después respecto al eje *r*? ¿Cuáles son ahora las coordenadas de los vértices de la figura *C'''* transformada?

50. Considera que los vértices del cuadrilátero de la figura tienen de coordenadas: (1, 3), (2, 3), (3, 2) y (2, 4). Aplícale dos simetrías axiales de ejes secantes, la primera respecto al eje *r* y la segunda respecto al eje *s*.



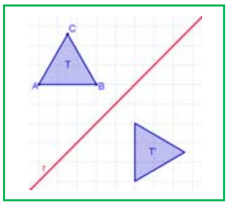
a) Indica las coordenadas de los vértices de las figuras transformadas por la composición de simetrías.

b) Si llamamos *C* al polígono inicial, *C'* al simétrico respecto al eje *r* y *C''* al simétrico de *C'* respecto al eje *s*: ¿Qué isometría nos permite trasformar directamente *C* en *C''*. ¿Qué elementos la definen?

c) ¿Qué ocurre si aplicamos las dos simetrías en distinto orden, primero respecto al eje *s* y después respecto al eje *r*? ¿Qué isometría tenemos ahora? ¿Qué elementos la definen?

d) Indica las coordenadas de los vértices de la figura transformada si primero aplicamos la simetría de eje *s* y luego la de eje *r*.

51. Dibuja en un papel el contorno de una figura irregular, en al menos cinco posiciones. (Si no se te ocurre ninguna figura, dibuja una letra G). a) ¿Son iguales estas figuras? Explica tu razonamiento. b) ¿Cómo puedes pasar de una figura a otra? c) Colorea con el mismo color todas las figuras que puedes alcanzar desde la posición inicial, desplazando la figura sin levantarla. Utiliza otro color para las restantes. ¿Se puede pasar siempre de una figura a otra del mismo color, deslizando la figura sin darle la vuelta? ¿Cambian las dimensiones de la figura?

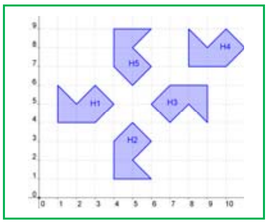


52. El triángulo equilátero T de la figura se ha transformado en el triángulo T' mediante una simetría axial de eje *r*. a) Copia el dibujo en tu cuaderno y nombra en el dibujo a *A'*, *B'* y *C'*, que son los transformados de *A, B* y *C* respectivamente. b) Encuentra un giro que trasforme T en T', indicando el centro y el ángulo de giro, ¿cuáles son ahora los trasformados de los vértices *A, B y C*.

53. **Libro de espejos:** Utiliza un libro de espejos para obtener simetrías. Puedes construir uno con dos rectángulos de metacrilato unidos con cinta de embalar. Mira por el libro de espejos un segmento, una circunferencia, diferentes figuras…

Problemas

54. Indica los puntos invariantes y las rectas invariantes en cada uno de los siguientes movimientos.



a) Una traslación según el vector (1, 3).

b) Una simetría axial respecto al eje de ordenadas.

c) Una simetría central respecto al centro de coordenadas.

55. En la figura adjunta el hexágono 1, denominado H1, ha cambiado de posición mediante movimientos. A) Indica el tipo de movimiento: traslación, giro o simetría que trasforma H1 en cada uno de los otros hexágonos. B) Determina, en cada caso, los elementos básicos que definen cada transformación indicando las coordenadas de cada uno de los vértices de H1 qué coordenadas tiene en cada uno de los transformados, y si es posible, generaliza.

56. Sabemos que las traslaciones no dejan ningún punto invariante, pero, a) ¿deja alguna recta invariante?

b) La simetría central deja un punto invariante, el centro, pero, ¿qué rectas deja invariantes una simetría central en el plano? ¿Y una simetría central en el espacio?

c) Una simetría axial deja invariantes todos los puntos de su eje, que es una recta invariante de puntos invariantes, pero ¿qué otras rectas invariantes deja una simetría axial? ¿Y qué otros puntos?

d) Una simetría especular, en el espacio, deja un plano invariante de puntos invariantes, el plano de simetría, ¿qué otros planos deja invariantes? ¿Qué otras rectas? ¿Qué otros puntos?

57. Copia en tu cuaderno y completa las siguientes tablas:

Tabla I: En el plano	Puntos invariantes	Rectas invariantes	Rectas invariantes de puntos invarinates
Traslación			
Simetría central			
Giro			
Simetría axial			
Simetría con deslizamiento			

Tabla II: En el espacio	Puntos invariantes	Rectas invariantes	Planos invariantes
Traslación			
Simetría central			
Giro			
Simetría especular			
Simetría con deslizamiento			

58. Dibuja el triángulo T de vértices *A* (2, 1), *B* (4, 2) y *C* (1, 3)

a) Aplica a T una traslación según el vector ***u*** = (–3, 2), llama T' a su transformado e indica las coordenadas de sus vértices.

b) Dibuja el triángulo T'' que resulta de aplicar a T un giro de 270º respecto al origen de coordenadas e indica las coordenadas de sus vértices.

59. Dibuja el cuadrado *K* de vértices *A* (2, 1), *B* (4, 2) *C* (1, 3) y *D* (3, 4).

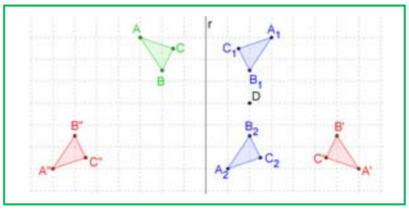
a) Aplica a *K* una traslación según el vector ***u*** = (–3, –1), llama *K*' a su transformado e indica las coordenadas de sus vértices.

b) Dibuja el cuadrado *C*'' que resulta de aplicar a *C* una simetría central respecto al punto (3, 0) e indica las coordenadas de sus vértices.

Problemas de ampliación

60. Transforma la letra L mediante dos isometrías consecutivas. ¿Puedes obtener el resultado final mediante una única isometría? Analiza posibles situaciones.

61. Pliega una tira de papel como un acordeón. Haz algunos cortes y despliégala. Habrás confeccionado un friso. Señala en él todas las isometrías. Ensaya otros diseños de frisos.

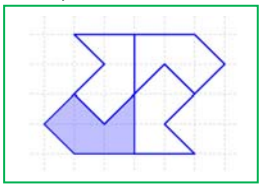


62. La composición de isometrías no es conmutativa. Observa la figura adjunta:

a) Determina la isometría que transforma el triángulo *ABC* en $A_1B_1C_1$ y la que transforma éste en $A_2B_2C_2$

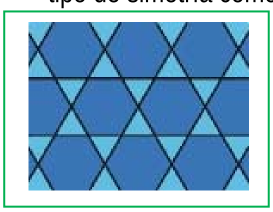
b) Indica la isometría que transforma el triángulo *ABC* en *A'B'C'* y la que transforma éste en *A''B''C''*.

c) ¿Qué conclusión obtienes?



63. Indica las isometrías que hay que aplicar a la figura coloreada en azul para obtener la figura completa. Determina los elementos que definen cada isometría. Colorea de distinto color cada uno de los cuatro polígonos y construye un friso.

64. 1) La letra A tiene un eje de simetría vertical. 2) La letra H tiene dos ejes de simetría, uno vertical y el otro horizontal, además de un centro de simetría. 3) La letra Z tiene centro de simetría, pero ningún eje de simetría. 4) La letra E tiene un eje de simetría horizontal. 5) La letra F no tiene centro de simetría ni ningún eje de simetría. Clasifica las letras del abecedario en estos grupos, en el primer grupo estarán las que tienen un eje de simetría vertical, como la letra A, en el segundo las que tiene dos ejes de simetría, uno vertical y el otro horizontal, como la letra H, en el tercero las que sólo tienen centro de simetría como la letra Z, y en el cuarto las que como la letra E tienen un eje de simetría horizontal. Por último, en un quinto grupo las que no tienen ningún tipo de simetría como la letra F.



65. **Análisis de un mosaico:** Dibuja en tu cuaderno una trama de triángulos, en ella un esquema del mosaico del margen y señala en tu dibujo todos los ejes de simetría, los centros de giro y los vectores de traslaciones por los cuales el transformado de un punto del mosaico (supuesto que se prolonga hasta el infinito) es también un punto del mosaico.

a) ¿Hay giros de 60º? Si los hay marca los centros de estos giros con un asterisco *.

b) ¿Hay giros de 180º? Si los hay marca los centros de estos giros con un círculo o.

c) Señala los ejes de simetría que encuentres con una línea de puntos.

d) Dibuja al margen los vectores de traslación, horizontales y verticales, que haya.
e) Diseña tu propio mosaico que mantenga los mismos movimientos haciendo algo sencillo (un arco, una poligonal) que se vaya moviendo.

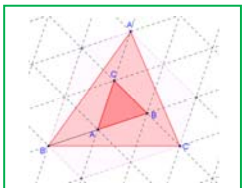
66. Analiza este otro mosaico. Indica las transformaciones que tenemos que aplicar al elemento mínimo del mosaico adjunto para dejarlo invariante. Indica también los elementos que las caracterizan.

67. En la animación siguiente observa la forma de obtener un mosaico. Ha tomado una celda unidad de 4 cuadraditos, ha seleccionado un motivo mínimo… Indica que simetrías ha utilizado, qué giros y qué traslaciones.
68. Determina los ejes y centros de simetría de las siguientes gráficas de funciones. Señala cuáles son pares y cuáles impares. (Dibuja previamente su gráfica).
    a) $y = x^2$ b) $y = x^3$ c) $y = x^4$ d) $y = x$
69. Un tetraedro regular tiene 6 planos de simetría, dibujalos en tu cuaderno e indica la forma de determinarlos.
70. Un octaedro tiene 9 planos de simetría, dibújalos, 6 pasan por los puntos medios de aristas opuestas, ¿sabes caracterizar los otros 3? Intenta encontrar planos de simetría en un dodecaedro, y en un icosaedro.
71. Un ser humano es más o menos simétrico. Los mamíferos, pájaros y peces también lo son. Tienen un plano de simetría. A) Y las estrellas de mar como la de la figura, ¿tienen un plano de simetría? B) ¿Tienen más? ¿Cuántos? C) ¿Tiene un eje de giro? ¿De qué ángulos? D) ¿Tiene simetría central? E) Dibuja en tu cuaderno una estrella de cinco puntas e indica sus ejes de simetría y su centro de giro. (Es un grupo de Leonardo D_5)

72. Un prisma recto de base un rectángulo, ¿tiene simetría central? ¿Tiene planos de simetría? ¿Cuántos? Descríbelos. ¿Tiene ejes de giro? Descríbelos. ¿De qué ángulos?
73. Una pirámide regular de base un triángulo equilátero, ¿tiene simetría central? ¿Tiene planos de simetría? ¿Cuántos? Descríbelos. ¿Tiene ejes de giro? Descríbelos. ¿De qué ángulos?
74. Describe las **isometrías** que dejan invariantes a los siguientes cuerpos geométricos, analizando sus elementos:
    a) Esfera b) Cilindro recto c) Prisma regular de base cuadrada
    d) Cono e) Cilindro oblicuo f) Pirámide recta de base un triángulo equilátero
75. Recorta un triángulo isósceles obtusángulo. Colócalo en el libro de espejos de forma que dos lados queden apoyados en la superficie de los espejos, y el otro sobre la mesa. Mueve las páginas del libro de forma que veas distintas pirámides, en las que su base son polígonos regulares. Esto nos permite estudiar el giro de las pirámides, de qué ángulo es. (Puedes construirte un libro de espejos con dos espejos pequeños o dos hojas de metacrilato, pegados con cinta de embalar adhesiva).
76. Piensa en los poliedros regulares. Copia la siguiente tabla en tu cuaderno y complétala:

POLIEDRO	¿Tiene centro de simetría? SI/NO	¿Tiene ejes de giro? SI/NO	¿Cuántos ejes de giro tiene? ¿De qué ángulos?	¿Tiene planos de simetría? SI/NO	¿Cuántos planos de simetría tiene?
Tetraedro					
Cubo					
Octaedro					
Dodecaedro					
Icosaedro					

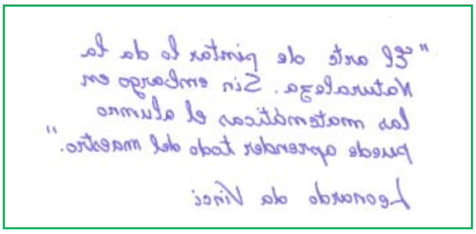
77. Contesta a las siguientes preguntas justificando las respuestas.
    a) ¿Es posible que una figura tenga dos ejes de simetría paralelos?
    b) La intersección de dos ejes de simetría, ¿es siempre un centro de simetría?
    c) ¿Por qué un espejo cambia la derecha por la izquierda y no cambia lo de arriba por lo de abajo?
    d) ¿Es cierto que dos círculos simétricos respecto a un plano son siempre cortes de una esfera?
78. A partir de un triángulo cualquiera *ABC* construimos el triángulo *A'B'C'*, en el que *A'* es el simétrico de *A* con respecto al centro *C*, *B'* es el simétrico de *B* con respecto al centro *A* y *C'* es el simétrico de *C* con respecto al centro *B*. Utiliza la trama de triángulos para calcular el área del triángulo *A'B'C'* sabiendo que el valor del área del triángulo *ABC* es 1 u^2.



79. **Caleidoscopios diédricos:** ¿Has mirado alguna vez por un caleidoscopio? Están formados por un tubo de cartón, dos espejos formando ángulo y trocitos de plástico o cristalitos que combinan sus imágenes dando lugar a preciosas composiciones llenas de simetrías. Fabrica uno, y estudia los giros y simetrías que observes.
80. **Simetrías plegando** papel: a) Dobla una hoja de papel y recorta una figura. Al desdoblar habrás obtenido la figura simétrica. b) Dobla una hoja de papel mediante dos dobleces perpendiculares. (Tendrás que hacer coincidir el doblez consigo mismo). Manteniendo el papel doblado recorta una figura. Al desdoblar, la figura obtenida tendrá una doble simetría. c) Con otra hoja de papel, vuelve a doblar mediante dos dobleces perpendiculares. Dobla de nuevo por la mitad

el ángulo recto obtenido. Recorta los diseños que más te gusten. Estas construyendo modelos de copo de nieve. ¿Cuántos ejes de simetría has obtenido? d) Intenta ahora doblar la hoja de papel para obtener ejes de simetría que formen ángulos de 60º y de 30º. Utiliza tu imaginación para obtener nuevos diseños de copos de nieve.

81. La simetría en la escritura de Leonardo Da Vinci: ¿Sabías que, si miras lo escrito por Leonardo en un espejo puedes leerlo con facilidad? Es un buen ejemplo de simetría especular. Lee el siguiente texto del Leonardo.



82. Utiliza la propiedad de la composición de dos simetrías de ejes secantes para demostrar que un ángulo inscrito en una circunferencia es la mitad del central que abarca el mismo arco. *Ayuda*: Traza la circunferencia, un ángulo inscrito y su central. Traza dos rectas perpendiculares por el centro de la circunferencia a los lados del ángulo inscrito.
83. Estudia las isometrías que dejan invariante a un triángulo equilátero. Nombra sus vértices y sus ejes de simetría. a) Aplica al triángulo un giro de 120º y luego una simetría. ¿Puedes obtener el mismo resultado con una única transformación? b) Repite lo mismo con un giro de 240º y otra simetría. c) Comprueba que siempre la composición de un giro por una simetría es otra simetría. d) Haz ahora un giro de 120º y otro de 240º, ¿qué obtienes? e) ¿Y con dos giros de 240º? f) Comprueba que la composición de dos giros del mismo centro es siempre un giro (o la identidad).
84. Al pasear por la ciudad, mirar el aula, en todo lo que nos rodea podemos ver como la Geometría permite explicarlo. Mira este mosaico. Busca un motivo mínimo, es decir, un trozo de mosaico que te permite, mediante movimientos, recomponerlo. En el diseño de este mosaico, ¿se han utilizado simetrías?

- ¿Hay simetrías de eje vertical?
- ¿Hay simetrías de eje horizontal?
- ¿Hay otros ejes de simetría? ¿Cuáles?
- ¿Hay giros de 90º?
- ¿Hay giros de 45º?
- ¿Hay traslaciones?

85. Diseña en tu cuaderno un motivo mínimo (si no se te ocurre ninguno, usa la letra L), y utiliza las mismas simetrías, giros y traslaciones que se usan en este mosaico para hacer tu propio diseño de mosaico.

Observa tu diseño, y responde a las siguientes preguntas:

- ¿Si compones dos simetrías de ejes paralelos, qué movimiento obtienes? ¿Es otra simetría? ¿Es un giro? ¿Es una traslación? Indica en tu diseño de mosaico en qué ocasión has compuesto dos simetrías de ejes paralelos y describe completamente el movimiento que has obtenido.
- ¿Si compones dos simetrías de ejes secantes, qué movimiento obtienes? ¿Es otra simetría? ¿Es un giro? ¿Es una traslación? Indica en tu diseño en qué ocasión has compuesto dos simetrías de ejes secantes y describe completamente el movimiento que has obtenido.

86. Mira este otro mosaico. Es el famoso mosaico Nazarí de los huesos. No vamos a tener en cuenta el color. Para diseñar el hueso, dibuja en tu cuaderno un cuadrado. Mira la figura. Corta en los lados verticales un trapecio y colócalo sobre los lados horizontales. Ya tienes el hueso. ¿Es simétrico? Tiene un eje de simetría vertical y otro horizontal, por lo que podríamos tomar como motivo mínimo la cuarta parte del hueso.

- Para pasar de un hueso de color a un hueso blanco, ¿qué trasformación se ha usado?
- Dibuja en tu cuaderno, en color rojo, ejes de simetría verticales y en color azul, ejes de simetría horizontales.
- Señala, con un asterisco, (*), centros de giro de 90º, y con un círculo, (o), centros de simetría.
- Utilizando el hueso dibuja en tu cuaderno el mosaico completo.

87. Dibuja en tu cuaderno una letra F mayúscula, y traza también dos rectas m y n que formen un ángulo de 30º y se corten en un punto O. Dibuja su transformado por:
    a) Un giro de centro el punto O y ángulo 60º.
    b) La simetría de eje n
    c) La simetría de eje m
    d) La composición de la simetría de eje n con la de eje m
    e) Compara el resultado obtenido en el apartado a) con el del apartado d). ¿Qué observas?

RESUMEN

Semejanza	Transformación geométrica que conserva los ángulos y las distancias son proporcionales.	Un fotocopia reducida
Traslación	Viene determinada por su vector de traslación. Son isometrías directas. La composición de dos traslaciones es una traslación.	El trasladado del punto P (1, 2) por la traslación de vector **v** = (4, 5) es P' (5, 7).
Giro o rotación en el plano Giro en el espacio	Viene determinado por el centro de giro y el ángulo de giro. Viene determinado por el eje de giro y el ángulo	El girado del punto P (1, 2) por el giro de centro el origen y ángulo 90º es P' (2, –1)
Simetría axial Simetría especular	Se conoce por su eje de simetría Se conoce por su plano de simetría	El simétrico del punto P (1, 2) por la simetría de eje el eje de ordenadas es P' (–1, 2)
Isometrías	Son trasformaciones geométricas que conservan las distancias y los ángulos.	Traslaciones, giros y simetrías
Composición de isometrías	La composición de dos isometrías directas es una isometría directa. La composición de dos isometrías inversas es una isometría directa. La composición de una isometría directa con una inversa es una isometría inversa.	
Composición de isometrías en el plano	La composición de dos giros del mismo centro es un giro del mismo centro. La composición de dos simetrías es un giro o una traslación.	
Elementos invariantes en el plano	La **traslación** no deja **ningún** punto invariante. El **giro** deja invariante **un** punto, el centro de giro. La **simetría** deja invariante una **recta**, el eje de simetría La **identidad** deja invariante **todo** el plano.	
Elementos invariantes en el espacio	La **traslación** no deja **ningún** punto invariante. La **simetría central** deja invariante **un** único punto, el centro de simetría. El **giro** deja invariante una **recta**, el eje de giro. La **simetría** deja invariante el **plano** de simetría La **identidad** deja invariante **todo** el espacio.	

f) Un buen resumen de este capítulo lo tienes en este Power Point

AUTOEVALUACIÓN

1. Con la traslación de vector **u** = (–3, 8) trasladamos el punto *P* (5, –4) hasta el punto *P'* y las coordenadas de *P´* son:
   a) (8, 4) b) (2, 4) c) (2, 12) d) (6, 3)
2. Al trasladar *A* (–1, 8) hasta *A'* (4, 6) se utiliza el vector **u**:
   a) **u** = (3, 2) b) **u** = (3, –2) c) **u** = (5, –2) d) **u** = (5, 14)
3. La transformación que lleva el punto *A* (2, 0) en el punto *A'* (0, 2) **no** puede ser:
   a) Un giro de centro el origen y ángulo 90º b) Una traslación de vector **u** = (–2, 2)
   c) Un giro de centro el origen y ángulo 270º d) Una simetría de eje *y* = *x*.
4. La transformación identidad también se llama:
   a) Simetría central b) Simetría axial c) Giro de 180º d) Traslación de vector nulo (0, 0)
5. ¿Cómo debe ser un triángulo para tener más de dos ejes de simetría?
   a) rectángulo b) isósceles c) equilátero d) rectángulo isósceles
6. La simetría central en el plano es un giro de:
   a) 360º b) 180º c) 90º d) 0º
7. En el plano, la composición de dos simetrías de ejes secantes siempre es:
   a) una traslación b) un giro c) otra simetría d) la simetría central
8. Las coordenadas del punto simétrico al punto *A* (3, 7) respecto del eje de ordenadas son:
   a) *A'* (–3, 7) b) *A'* (3, –7) c) *A'* (–3, –7) d) *A'* (7, 3)
9. Indica cuál de las siguientes letras **no** tiene simetría central:
   a) O b) H c) S d) D
10. Siempre se obtiene un giro haciendo sucesivamente:
    a) Dos giros de distinto centro b) Dos simetrías de ejes secantes
    c) Un giro y una simetría d) Dos simetrías de ejes paralelos.

CAPÍTULO 9: GEOMETRÍA EN EL ESPACIO. GLOBO TERRÁQUEO.
Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas: 3º B de ESO

1. PERPENDICULARIDAD Y PARALELISMO EN EL ESPACIO

1.1. Posiciones relativas en el espacio

En el espacio de tres dimensiones en que nos movemos, los elementos geométricos más sencillos son puntos, rectas y planos. Nuestro primer objetivo es describir las posiciones que pueden presentar cualquier pareja de estos elementos. Trata de imaginarlas antes de leer.

Distinguiremos varios casos:

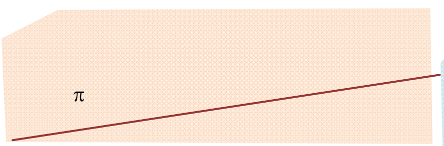
a) Punto – recta:

Puede ser que el punto pertenezca a la recta o que sea exterior a ella.

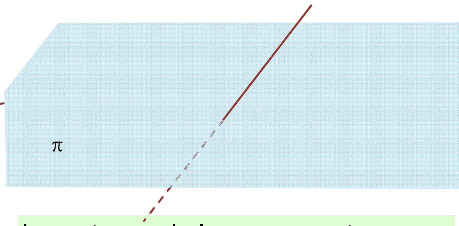
b) Punto – plano:

Lo mismo ocurre con un punto y un plano: sólo hay dos posiciones posibles, el punto está en el plano o fuera del mismo.

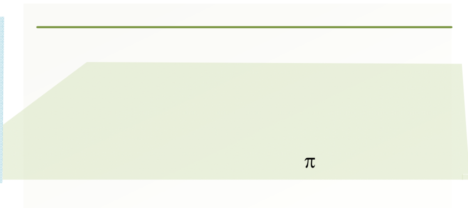
c) Plano – recta:



r está contenida en el plano



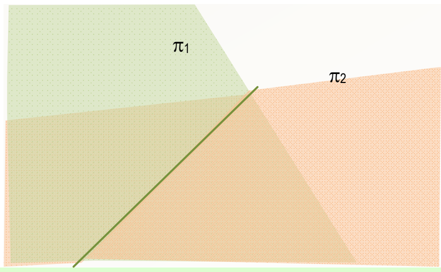
La recta r y el plano π se cortan en un punto



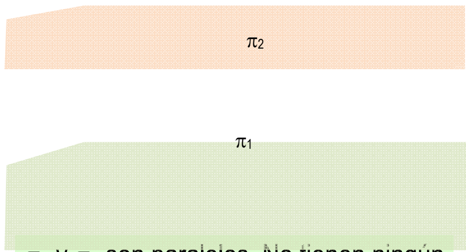
La recta r y el plano π son paralelos

d) Plano – plano:

π_1 y π_2 son iguales y todos sus puntos coinciden.



π_1 y π_2 son secantes. Tienen en común todos los puntos de una recta

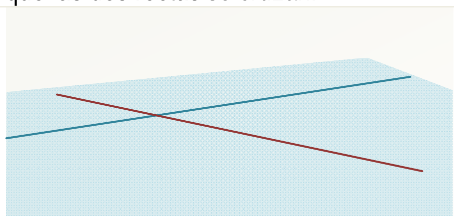


π_1 y π_2 son paralelos. No tienen ningún punto común

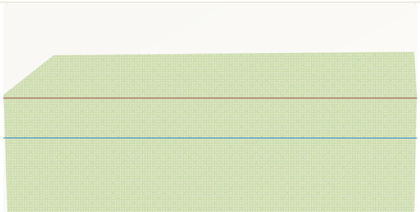
e) Recta – recta:

Dos rectas en el espacio pueden ser *coplanarias* si es posible dibujarlas en un mismo plano, o *no coplanarias* en otro caso.

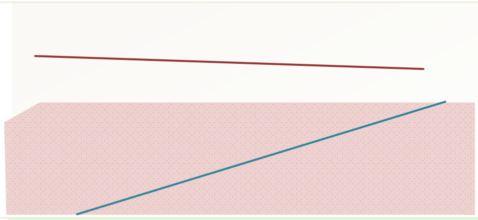
Si dos rectas son coplanarias pueden ser *paralelas*, si tienen la misma dirección, *secantes,* si tienen un punto común, o *coincidentes* si tienen comunes todos sus puntos. Si dos rectas son no coplanarias no tienen ningún punto común y se dice que las dos rectas *se cruzan.*



r y *s* son secantes.



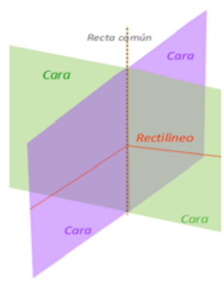
r y *s* son paralelas.



r y *s* se cruzan.

1.2. Ángulos diedros, triedros y poliedros.

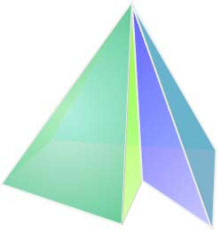
Todo plano divide al espacio en dos semiespacios. Dos planos que se cortan quedan divididos en cuatro semiplanos que pasan por una misma recta y que a su vez dividen al espacio en cuatro regiones.



Cada una de las regiones del espacio comprendida entre dos semiplanos que tienen una recta común, se llama *ángulo diedro*. Los semiplanos que lo definen se llaman *caras* del ángulo diedro y la recta común *arista.*

Si en un diedro trazamos dos perpendiculares a la arista en el mismo punto, situadas cada una de ellas en una cara, el ángulo que forman dichas perpendiculares se llama *ángulo rectilíneo del diedro.*

Un ángulo poliedro es la región del espacio limitada por tres o más semiplanos que son secantes dos a dos y que tienen un punto común que se llama *vértice*. Cada semiplano es una cara del poliedro y las rectas intersección de las caras son las *aristas* del ángulo poliedro.



La suma de los ángulos de los diedros que forman un ángulo poliedro debe ser menor que 360º

En el caso en que un ángulo poliedro tenga exactamente tres caras, se llama *triedro*.

Ejemplo:

- Observa cualquiera de las esquinas del techo de la habitación en la que estás. Cada una de ellas es el vértice de un triedro en el que las caras son dos paredes consecutivas y el techo.

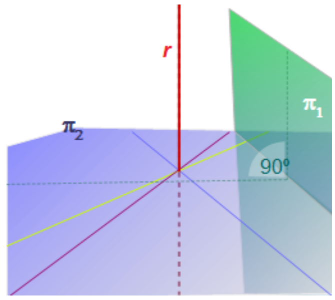
1.3. Perpendicularidad en el espacio

En el espacio debemos tratar varios casos de perpendicularidad.

Dos planos son perpendiculares si los cuatro ángulos rectilíneos que determinan, son ángulos rectos.

Una recta es perpendicular a un plano si lo corta y es perpendicular a cualquier recta que esté contenida en el plano.

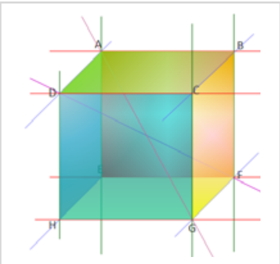
Dos rectas son *perpendiculares* si forman un ángulo recto. Es el caso más sorprendente por dos razones en primer lugar en el espacio dos rectas pueden ser perpendiculares sin cortarse y en segundo hay infinitas rectas perpendiculares a una recta *r* dada y que pasan por un punto P dado. Todas ellas están contenidas en un plano perpendicular a la recta *r* que pasa por el punto P.



es perpendicular a π_2 y a todas las rectas contenidas en π_2. Los planos π_1 y π_2 son perpendiculares

Actividades resueltas

- Busca un ejemplo en la figura de: *a*) Planos paralelos. *b*) Planos perpendiculares. c) Rectas paralelas. *d*) Rectas perpendiculares y coplanarias. *e*) Rectas perpendiculares y no coplanarias. *f*) Recta y plano paralelos.



a) El plano que contiene a la cara *ABCD* es paralelo al plano que contiene a la cara *EFGH*.

b) El plano que contiene a la cara *ABCD* es perpendicular a los planos que contienen a las caras *DCGH*, *CBFG*, *ABFE* y *ADHE*.

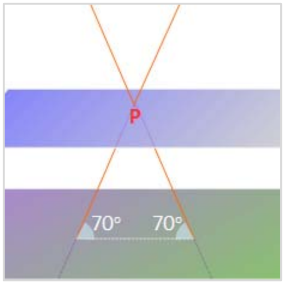
c) La recta que pasa por *A* y *B* es paralela a la recta que pasa por *D* y *C*, a la recta que pasa por *E* y *F*, y a la recta que pasa por *H* y *G*.

d) La recta que pasa por *H* y *G* es perpendicular a la recta que pasa por *G* y *F*, y ambas están en el plano que contiene a la cara *EFGH*, por lo que son también coplanarias.

e) La recta que pasa por *H* y *G* es perpendicular a la recta que pasa por *A* y *D*. Estas dos rectas pertenecen a planos diferentes.

f) La recta que pasa por *A* y *B* es paralela al plano que contiene a la cara *EFGH*.

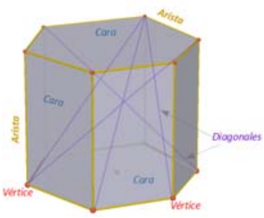
- Si dos planos paralelos determinan segmentos iguales al cortar a dos rectas, ¿puedes afirmar que las rectas son paralelas?



No necesariamente. Observa la figura de la derecha y te darás cuenta. Las rectas del dibujo determinan un triángulo isósceles al cortar a dos planos paralelos y cortarse entre sí, tal como aparece en la figura. Los segmentos interceptados por los planos al cortar a las dos rectas son iguales, sin embargo, las rectas no son paralelas.

Actividades propuestas

1. Busca en la habitación en la que te encuentras, ejemplos de:
   a. Planos paralelos y perpendiculares.
   b. Rectas paralelas, rectas perpendiculares y coplanarias, rectas perpendiculares y no coplanarias.
   c. Recta paralela a plano, recta y plano secantes, recta contenida en plano.
2. Las hojas de una puerta giratoria forman entre sí 5 ángulos diedros consecutivos e iguales. ¿Cuánto mide cada uno de ellos?
3. Desde un punto interior a una sala de planta hexagonal regular se traza una recta perpendicular a cada pared. ¿Cuánto medirá el ángulo que forman dos perpendiculares consecutivas?
4. Dos triedros tienen las tres caras iguales, ¿se puede asegurar que son iguales? Razona la respuesta.



2. POLIEDROS

2.1. Poliedros. Elementos de un poliedro

Un *poliedro* es una región cerrada del espacio limitada por polígonos.

En todo poliedro podemos considerar los siguientes elementos: *caras, aristas, vértices, ángulos* *diedros* y *poliedros*, así como las *diagonales*.

Las *caras* son los polígonos que lo limitan, las *aristas y vértices* los lados y vértices de los polígonos que forman las caras.

Los *ángulos diedros* están formados por dos caras que tienen una arista común. Los *ángulos poliedros* están formados por varias caras que tienen un vértice común.

Una *diagonal* de un poliedro es un segmento que une dos vértices pertenecientes a caras diferentes.

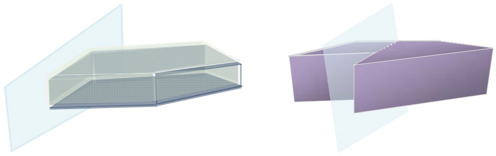
Un *plano diagonal* es un plano que contiene tres vértices que no pertenecen a la misma cara.

2.3. Poliedros convexos. Teorema de *Euler*.

Es posible clasificar poliedros atendiendo a diferentes criterios. Si nos fijamos en la amplitud de sus ángulos diedros, se clasifican en *cóncavos y convexos.*

Un poliedro es *convexo* si el segmento que une dos puntos cualesquiera del poliedro, está dentro del mismo. En poliedros convexos, únicamente uno de los dos semiespacios que determina cada uno de los planos que contienen a las caras, contiene también al resto del poliedro.

Un poliedro es *cóncavo* en caso contrario. En los poliedros cóncavos alguno de los planos que contienen a las caras divide al poliedro en dos cuerpos que pertenecen a semiespacios distintos.



Poliedro convexo Poliedro cóncavo

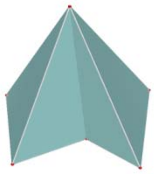
En los poliedros convexos se cumple el llamado *Teorema de Euler* que relaciona las caras, vértices y aristas y afirma que en todo poliedro convexo el número de caras más el número de vértices coincide con el número de aristas más 2. Si caras, vértices y aristas se representan por sus iniciales, se escribe:

$$C + V = A + 2$$

Existen poliedros cóncavos que cumplen esta relación y poliedros cóncavos que no la cumplen.

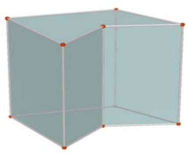
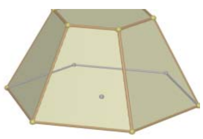
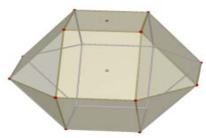
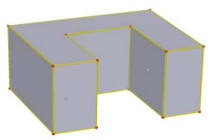
Actividades resueltas

- *Comprueba que los siguientes cuerpos geométricos verifican el teorema de Euler.*

 Hay dos caras ocultas que son cuadriláteros	Este cuerpo geométrico es un poliedro convexo. Tiene 7 caras de las cuales 5 son cuadriláteros, 1 es un pentágono y 1 es un triángulo. Tiene 9 vértices y para calcular el número de aristas sumamos el total de lados de las caras y dividimos entre 2, ya que cada arista es lado de dos caras: Nº de aristas = ——— $C + V = 7 + 9 = 16$ $A + 2 = 14 + 2 = 16$ Cumple el teorema de *Euler*
 Todos los vértices están a la vista	Si se ven todos los vértices, hay dos caras ocultas: una de ellas es un triángulo y la otra es un pentágono cóncavo. Es un poliedro cóncavo. Tiene un total de 6 caras, 6 vértices y Nº de aristas = ——— $C + V = 6 + 6 = 12$ $A + 2 = 10 + 2 = 12$ Verifica el teorema de *Euler*

Actividades propuestas

5. Investiga si los siguientes cuerpos son poliedros y, en caso afirmativo, si cumplen el teorema de *Euler*. Indica también si son cóncavos o convexos

2.4. Poliedros regulares.

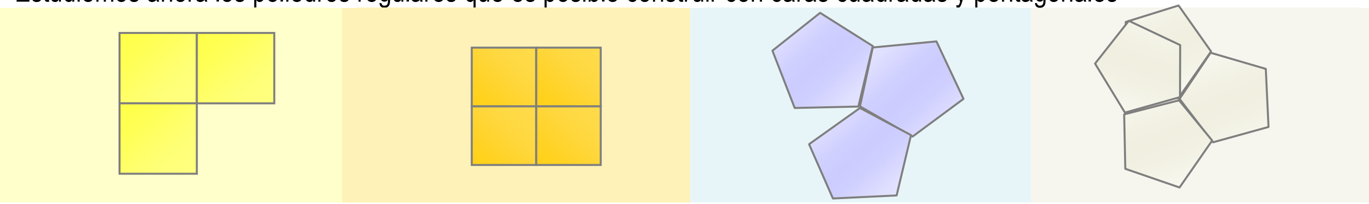
Un poliedro regular es un poliedro que cumple que todas sus caras son polígonos regulares iguales y que sus ángulos poliedros son iguales.

En todo poliedro regular coinciden el mismo número de caras en cada vértice. Es sencillo probar que sólo existen cinco poliedros regulares.

El polígono regular con menos lados es el triángulo equilátero. Busquemos los poliedros regulares que pueden construirse con caras triangulares:

Como mínimo son necesarios tres triángulos por vértice y como máximo pueden concurrir cinco para que sea posible formar un ángulo poliedro

Si unimos tres triángulos equiláteros iguales por vértice, se forma un tetraedro. El octaedro aparece al unir cuatro triángulos equiláteros iguales en cada vértice. Con cinco triángulos equiláteros, también iguales, por vértice, se forma un icosaedro. Si unimos seis triángulos equiláteros en un vértice, la suma de los ángulos de las caras concurrentes es 360º y no se puede formar ninguno ángulo poliedro, así que no hay más poliedros regulares con caras triangulares.
Estudiemos ahora los poliedros regulares que es posible construir con caras cuadradas y pentagonales



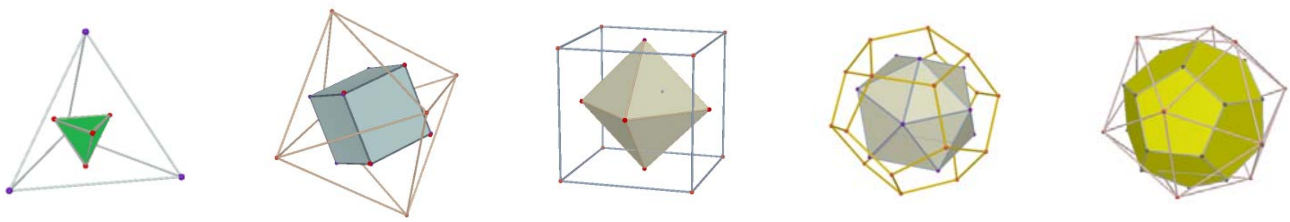
Con tres cuadrados iguales en cada vértice construimos un cubo. Al unir cuatro cuadrados en un vértice, la suma de los ángulos en el vértice común a los cuatro es 360º con lo que no podemos formar ningun poliedro mas que el cubo de caras cuadradas.
Sólo es posible construir un poliedro regular con caras pentagonales uniendo tres pentágonos en cada vértice. Es el dodecaedro. Un número mayor de pentágonos por vértice daría una suma de ángulos superior a 360º.
Entonces queda probado que sólo existen cinco poliedros regulares:

Los poliedros regulares son *desarrollables* porque pueden ser construidos a partir de un desarrollo plano formado por todas sus caras.
Todos cumplen la relación de Euler para poliedros convexos. Puedes comprobarlo:

	TETRAEDRO	CUBO	OCTAEDRO	DODECAEDRO	ICOSAEDRO
N° DE CARAS	4	6	8	12	20
N° DE VÉRTICES	4	8	6	20	12
N° DE ARISTAS	6	12	12	30	30
FORMA DE LAS CARAS	TRIANGULARES	CUADRADAS	TRIANGULARES	PENTAGONALES	TRIANGULARES

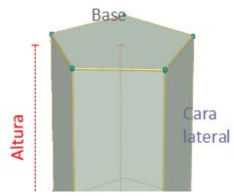
2.5. Dual de un poliedro regular.

Se define el poliedro dual de un poliedro regular como el poliedro resultante de unir los centros de las caras del poliedro inicial y tomarlos como vértices del nuevo poliedro. Fíjate que entonces el número de caras de un poliedro coincide con el número de vértices de su poliedro dual.
El poliedro dual del tetraedro es el tetraedro. El cubo y el octaedro son duales entre sí. También el dodecaedro es dual del icosaedro y recíprocamente.



2.6. Prismas

Un *prisma* es un poliedro determinado por dos caras paralelas que son polígonos iguales y tantas caras laterales, que son paralelogramos, como lados tienen las bases.

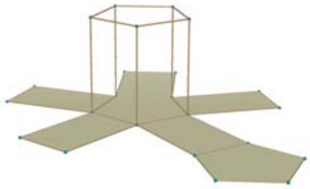


Los prismas son cuerpos desarrollables. El desarrollo de un prisma recto está compuesto por sus dos bases y por tantos paralelogramos como caras laterales tenga.

La altura del prisma es la distancia entre las bases.

Es posible clasificar un prisma atendiendo a diferentes conceptos:

Por la forma de las caras laterales pueden ser *rectos u oblicuos*. Son *rectos* si las citadas caras son rectángulos y son *oblicuos* si son rombos o romboides.



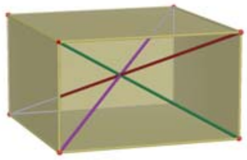
Por la forma de las bases pueden ser triangulares, cuadrangulares, pentagonales, hexagonales dependiendo de que el polígono de la base sea triángulo, cuadrado, pentágono, hexágono, etc...

Si además un prisma es recto y tiene polígonos regulares como bases, el prima se llama *regular*. En cualquier otro caso el prisma se llama *irregular*.

Por la forma de sus ángulos diedros pueden ser cóncavos y convexos.

2.6. Paralelepípedos

Los paralelepípedos son prismas en los que las bases son paralelogramos.



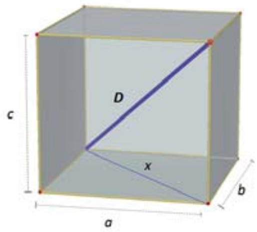
Además, todas las caras laterales son también paralelogramos y las caras opuestas son iguales entre sí por lo que cualquier cara puede tomarse como base.

Los paralelepípedos pueden ser*: cubos* si tienen todas sus caras cuadradas, *ortoedros* si todas sus caras son rectángulos, *romboedros* si todas sus caras son rombos o *romboiedros* si todas sus caras son romboides.

Una propiedad importante de todos los paralelepípedos es que las cuatro diagonales se cortan en el punto medio.

2.7. Teorema de Pitágoras en el espacio

La diagonal de un ortoedro al cuadrado coincide con la suma de los cuadrados de sus aristas.



Vamos a demostrarlo: Sean *a, b* y *c* las aristas del ortoedro que suponemos apoyado en el rectángulo de dimensiones *a* , *b*.

Si *x* es la diagonal de este rectángulo, cumple: $x^2 = a^2 + b^2$

El triángulo de lados *D, x, a* es rectángulo luego: $D^2 = x^2 + c^2$

Y teniendo en cuenta la relación que cumple *x:*

$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$

Actividades resueltas

- *Las aristas de la base de una caja con forma de ortoedro miden 10 cm y 11 cm y su altura 8 cm. Estudia si puedes guardar en ella tres barras de longitudes 14 cm, 16 cm y 18 cm.*

El rectángulo de la base tiene una diagonal d que mide: $d = \sqrt{10^2 + 11^2} = \sqrt{221} \approx 14{,}9$ cm

Luego la barra más corta cabe apoyada en la base

Calculemos ahora cuánto mide la diagonal del ortoedro:

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 8^2 + 10^2 + 11^2 = 285 \Rightarrow D = \sqrt{285} \approx \ 16{,}9 \text{ cm}$$

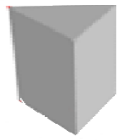
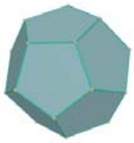
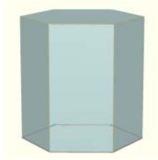
Luego, la barra de 16 cm cabe también en la caja pero la de 18 cm no.

Actividades propuestas

6. Es posible demostrar con un rompecabezas el teorema de Pitágoras en el espacio. Te proponemos que lo intentes. Podrás encontrar en la revista y entre los recursos para imprimir y las piezas que te ayudarán. En la fotografía se muestra el puzzle resuelto.

7. ¿Es posible construir un prisma cóncavo triangular? ¿Y un prisma cóncavo regular? Razona las respuestas.
8. Entre los poliedros regulares, ¿hay alguno que sea prisma? En caso afirmativo clasifícalo.
9. ¿Basta que un paralelepípedo tenga dos caras rectangulares para que sea un prisma recto?
10. Dibuja un prisma pentagonal regular y comprueba que cumple la relación de Euler.
11. Una caja tiene forma cúbica de 2 dm de arista. ¿Cuánto mide su diagonal?

12. Calcula la medida de la diagonal de una sala que tiene 10 metros de largo, 4 metros de ancho y 3 metros de altura.
13. Clasifica los siguientes poliedros

2.8. Pirámides.

Una pirámide es un poliedro determinado por una cara poligonal denominada base y tantas caras triangulares con un vértice común como lados tiene la base.

El punto donde convergen todos los triángulos laterales se denomina *vértice* o cúspide.

Las pirámides se pueden clasificar por conceptos análogos a los de los prismas. Así destacamos que las pirámides, según la forma de la base, se clasifican en *triangulares, cuadrangulares, pentagonales,…*

Una pirámide es *regular* cuando lo es el polígono de la base y además las caras laterales son triángulos isósceles iguales. La altura de estos triángulos laterales se llama *apotema de la pirámide*. No debes confundir el apotema de una pirámide regular con el apotema del polígono de la base.

La *altura* de una pirámide es la distancia del vértice a la base. Si una pirámide es regular, coincide con la distancia entre el vértice de la pirámide y el centro del polígono de la base.

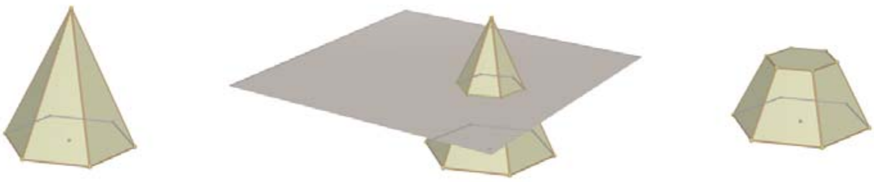
Las pirámides son desarrollables. El desarrollo de una pirámide lo forman el polígono de la base y tantas caras triangulares como lados tenga la base. Si la pirámide es regular, los triángulos son isósceles e iguales.

Actividades propuestas

14. ¿Hay alguna pirámide regular que sea poliedro regular? ¿Y pirámides con caras paralelas? En caso afirmativo pon un ejemplo y en caso negativo, justifica tus respuestas.
15. Dibuja una pirámide hexagonal regular y distingue la apotema de la pirámide del apotema de la base. Dibuja también su desarrollo.

2.9. Tronco de pirámide.

Un tronco de pirámide es el poliedro resultante al cortar una pirámide por un plano paralelo a la base. Las bases son polígonos semejantes y las caras laterales son trapecios.



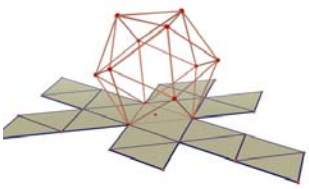
Un tronco de pirámide es regular cuando es una porción de pirámide regular. En este caso las caras laterales son trapecios isósceles y las bases son polígonos regulares semejantes.

3. ÁREA LATERAL Y TOTAL DE UN POLIEDRO

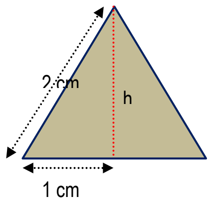
3.2. Área total de un poliedro regular.

Como las caras de los poliedros regulares son iguales, el cálculo del área total de un poliedro regular se reduce a calcular el área de una cara y después multiplicarla por el número de caras.

Actividades resueltas



- *Calcula el área total de un icosaedro de 2 cm de arista.*



Todas sus caras son triángulos equiláteros de 2 cm de base. Calculamos la altura h que divide a la base en dos segmentos iguales

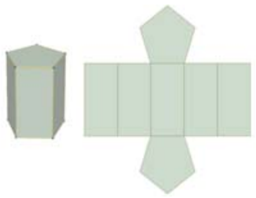
$h^2 + 1^2 = 2^2 \Rightarrow h^2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow h = \sqrt{3}$ cm

Luego el área de una cara será:

$A_{triángulo} = \frac{b.h}{2} = \frac{2.\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ cm^2 y por tanto Área icosaedro = $20\sqrt{3}$ cm^2

3.3. Áreas lateral y total de un prisma.

El área lateral de un prisma es la suma de las áreas de las caras laterales.



Como las caras laterales son paralelogramos de la misma altura, que es la altura del prisma, podemos escribir:

Área lateral = Suma de las áreas de las caras laterales =
= Perímetro de la base · altura del prisma.

Si denotamos por h la altura y por P_B el perímetro de la base:

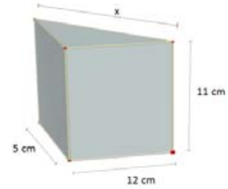
$$\text{Área lateral} = A_L = P_B \,.\, h$$

El área total de un prisma es el área lateral más el doble de la suma del área de la base:

$$\text{Área total} = A_T = A_L + 2.\ A_B$$

Actividades resueltas

- *Calcula las áreas lateral y total de un prisma triangular recto de 11 cm de altura si su base es un triángulo rectángulo de catetos 12 cm y 5 cm.*



Calculamos en primer lugar la hipotenusa del triángulo de la base:

$$x^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 \Rightarrow x = \sqrt{169} = 13 \text{ cm}$$

$$P_B = 12 + 5 + 13 = 30\ cm;\ A_B = \frac{12 \cdot 5}{2} = 30\ cm^2$$

$$A_L = P_B \cdot h = 30 \cdot 11 = 330\ cm^2 \quad A_T = A_L + 2 \cdot A_B = 330 + 60 = 390\ cm^2$$

3.4. Áreas lateral y total de una pirámide y de un tronco de pirámide regulares.

El área lateral de una pirámide regular es la suma de las áreas de las caras laterales.

Son triángulos isósceles iguales por lo que, si la arista de la base mide b, el apotema de la pirámide es Ap y la base tiene n lados, este área lateral es:

$$\text{Área lateral} = A_L = n \,.\, \frac{b\,.\,Ap}{2} = \frac{n\,.\,b\,.\,Ap}{2}$$

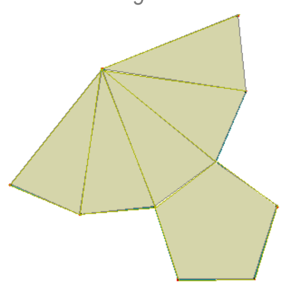
y como $n\ .\ b$ = Perímetro de la base

$$A_L = \frac{P_B\,.\,Ap}{2} = \frac{\text{Perímetro de la base}\ .\ \text{Apotema de la pirámide}}{2}$$

El área total de una pirámide es el área lateral más el área de la base:

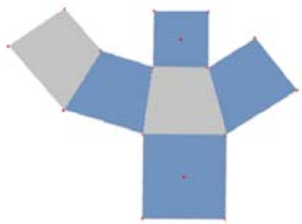
$$\text{Área total} = A_T = A_L + A_B$$

Desarrollo de pirámide pentagonal regular



Un tronco de pirámide regular es un cuerpo geométrico desarrollable. En su desarrollo aparecen tantas caras laterales como lados tienen las bases. Todas ellas son trapecios isósceles.

Desarrollo de tronco de pirámide cuadrangular



Si B es el lado del polígono de la base mayor, b el lado de la base menor, n el número de lados de las bases y Ap es la altura de una cara lateral

$$\text{Área lateral} = A_L = n \,.\, \frac{(B+b)\,.\,Ap}{2} = \frac{(P_B + P_b)\,.\,Ap}{2} =$$

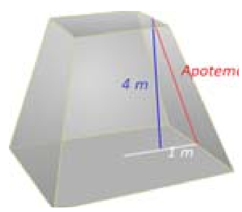
$$= \frac{\text{Suma de perímetro de las bases}\ .\ \text{Apotema del tronco}}{2}$$

El área total de un tronco de pirámide regular es el área lateral más la suma de áreas de las bases:

$$\text{Área total} = A_T = A_L + A_B + A_b$$

Actividades resueltas

- *Calculemos el área total de un tronco de pirámide regular de 4 m de altura si sabemos que las bases paralelas son cuadrados de 4 m y de 2 m de lado.*



En primer lugar calculamos el valor del apotema. Teniendo en cuenta que el tronco es regular y que las bases son cuadradas se forma un triángulo rectángulo en el que se cumple:

$$Ap^2 = 4^2 + 1^2 = 17 \Rightarrow Ap = \sqrt{17} \approx 4{,}12 \text{ m}$$

$$A_L = \frac{(P_B + P_b)\,.\,Ap}{2} = \frac{(16+8)\,.\,4{,}12}{2} = 49{,}44 \text{ m}^2$$

$$A_T = A_L + A_B + A_b = 49{,}44 \text{ m}^2 + 16 \text{ m}^2 + 4 \text{ m}^2 = 69{,}44 \text{ m}^2$$

Actividades propuestas

16. Calcula las áreas lateral y total de un prisma triangular regular sabiendo que las aristas de las bases miden 2 cm y cada arista lateral 8 m.

17. El área lateral de un prisma regular de base cuadrada es 63 m² y tiene 7 m de altura. Calcula el perímetro de la base.

18. El lado de la base de una pirámide hexagonal regular es de 6 cm y la altura de la pirámide 10 cm. Calcula el apotema de la pirámide y su área total.
19. Calcula el área lateral de un tronco de pirámide regular, sabiendo que sus bases son dos octógonos regulares de lados 4 y 7 dm y que la altura de cada cara lateral es de 8 dm.
20. Si el área lateral de una pirámide cuadrangular regular es 104 cm^2, calcula el apotema de la pirámide y su altura.

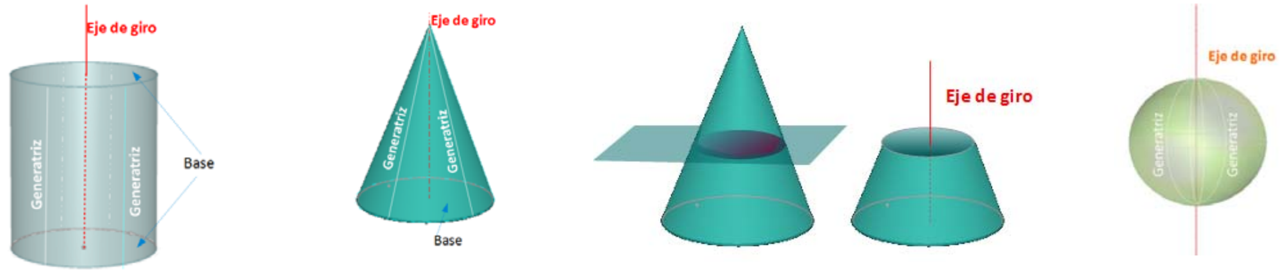
4. CUERPOS DE REVOLUCIÓN

4.1. Cuerpos de revolución: Cilindros, conos y esferas.

Los cuerpos de revolución son cuerpos geométricos que se obtienen al hacer girar una línea alrededor de una recta fija denominada *eje*. La línea que gira se llama *generatriz*.

También puede obtenerse un cuerpo de revolución mediante el giro de una figura plana alrededor de un eje de giro.

Los principales cuerpos de revolución son: *cilindros, conos* y *esferas*.

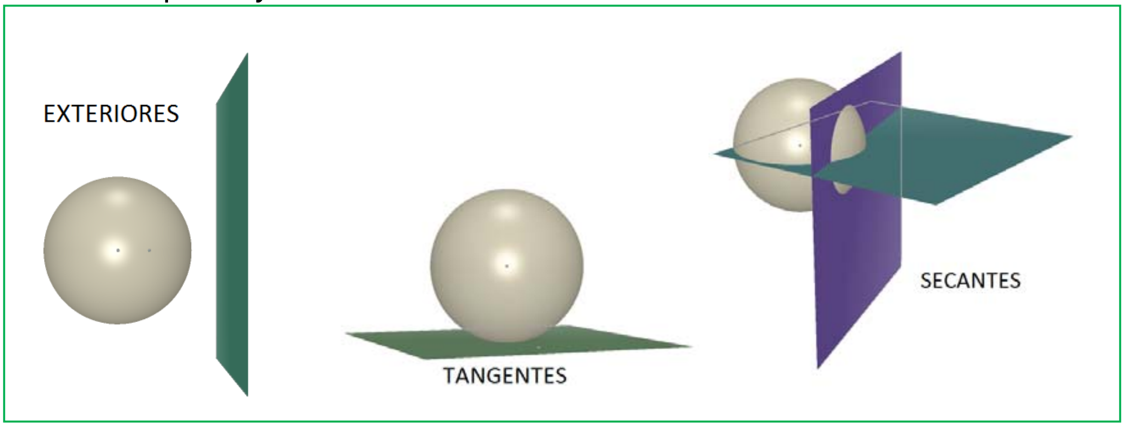


CILINDRO CONO TRONCO DE CONO ESFERA

La generatriz de un cilindro es una recta paralela al eje de giro. La de un cono es una recta secante con el eje y la de una esfera es una semicircunferencia cuyo centro está en el eje de giro

4.2. La esfera. Intersecciones de planos y esferas.

Una esfera y un plano pueden ser exteriores, tangentes y secantes. Si son secantes, su intersección es siempre un círculo. Si el plano es tangente, la intersección se reduce a un punto. Y si son exteriores, es el conjunto vacío.



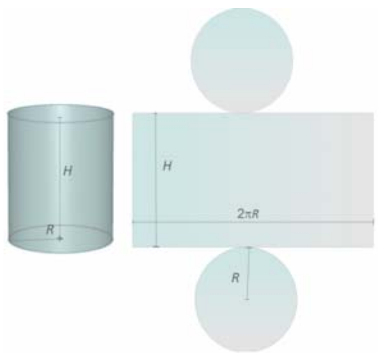
Puedes comprenderlo con facilidad pensando en una esfera (una naranja, por ejemplo) y un plano (el corte que haces con un cuchillo).

La intersección de una superficie esférica con un plano es, por tanto, una circunferencia, un punto o el conjunto vacío.

Con ecuaciones nos resulta más complicado pues una superficie esférica tiene una ecuación de segundo grado en dos variables, *x* e *y*. Un plano tiene una ecuación de primer grado también en *x* e *y*. Las ecuaciones de segundo grado pueden no tener ninguna raíz (en el campo real) con lo que el plano no cortaría a la esfera; tener una raíz doble (con lo que sería tangente) o cortarla (y en ese caso tendríamos una circunferencia).

Si el plano corta a la esfera pasando por el centro de la esfera, la intersección es un círculo máximo. En el caso de la esfera terrestres, el ecuador o los meridianos.

4.3. Áreas lateral y total de un cilindro



El cilindro es un cuerpo geométrico desarrollable. Si recortamos un cilindro recto a lo largo de una generatriz, y lo extendemos en un plano, obtenemos dos círculos y una región rectangular. De esta manera se obtiene su desarrollo.

A partir de éste, podemos ver que el área lateral de cilindro está determinada por el área del rectángulo que tiene como dimensiones la longitud de la circunferencia de la base y la altura del cilindro.

Supondremos que la altura del cilindro es H y que R es el radio de la base con lo que el área lateral A_L es:

$$A_L = \text{Longitud de la base . Altura} = (2\pi\, R).\,H\; = 2\pi RH$$

Si a la expresión anterior le sumamos el área de los dos círculos de que constituyen las bases, obtenemos el área total del cilindro.

$$A_T = A_L + \pi R^2 + \pi R^2 = 2\pi RH + 2\pi R^2$$

4.4. Áreas lateral y total de un cono

También el cono es un cuerpo geométrico desarrollable. Al recortar siguiendo una línea generatriz y la circunferencia de la base, obtenemos un círculo y un sector circular con radio igual a la generatriz y longitud de arco igual a la longitud de la circunferencia de la base.

Llamemos ahora R al radio de la base y G a la generatriz. El área lateral del cono es el área de sector circular obtenido. Para calcularla pensemos que esta área debe ser directamente proporcional a la longitud de arco que a su vez debe coincidir con la longitud de la circunferencia de la base. Podemos escribir entonces:

$$\frac{A\,\text{Lateral del cono}}{\text{Longitud de arco correspondiente al sector}} = \frac{A\,\text{total del círculo de radio}\,G}{\text{Longitud de la circunferencia de radio}\,G}$$

Es decir: $\dfrac{A_L}{2\pi R} = \dfrac{\pi\ G^2}{2\pi G}$ y despejando A_L tenemos:

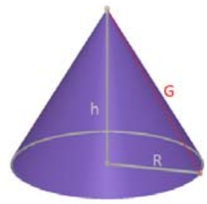
$$A_L = \frac{2\pi R\,\pi\ G^2}{2\pi G} = \ \pi\, R\, G$$

Si a la expresión anterior le sumamos el área del círculo de la base, obtenemos el área total del cono.

$$A_T = A_L + \pi\cdot R^2 = \pi\cdot R\cdot G + \pi\cdot R^2$$

Actividades resueltas

- *Calcula el área total de un cono de 12 dm de altura, sabiendo que la circunferencia de la base mide 18,84 dm .(Toma 3,14 como valor de π)*



Calculamos en primer lugar el radio R de la base:

$$2\pi R = 18{,}84 \Rightarrow \quad R = \frac{18{,}84}{2\pi} \approx \frac{18{,}84}{6{,}28} = 3 \text{ dm.}$$

Calculamos ahora la generatriz G:

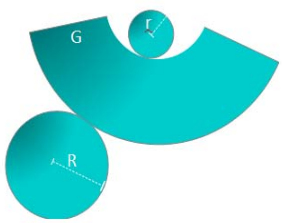
$$G = \sqrt{R^2 + h^2} \Rightarrow \quad G = \sqrt{3^2 + 12^2} = \sqrt{153} \approx 12{,}37 \text{ dm.}$$

Entonces $A_T = A_L + \pi\cdot R^2 = \pi\cdot R\cdot G + \pi\cdot R^2 = 3{,}14 \cdot 3 \cdot 12{,}37 + 3{,}14 \cdot 3^2 \approx 144{,}79$ dm^2.

4.5. Áreas lateral y total de un tronco de cono.

Al cortar un cono por un plano paralelo a la base, se obtiene un tronco de cono. Al igual que el tronco de pirámide, es un cuerpo desarrollable y su desarrollo lo constituyen los dos círculos de las bases junto con un trapecio circular, cuyas bases curvas miden lo mismo que las circunferencias de las bases.

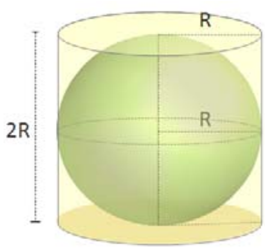
Llamando R y r a los radios de las bases y G a la generatriz resulta:



$$A_L = \frac{(2\pi\, R + 2\pi\, r\ )G}{2} = \frac{2(\pi\, R + \pi\, r)\,G}{2} = (\pi\, R + \pi\, r)\,G$$

Si a la expresión anterior le sumamos las áreas de los círculos de las bases, obtenemos el área total del tronco de cono:

$$A_T = A_L + \pi\cdot R^2 + \pi\cdot r^2$$



4.6. Área total de una esfera.

La esfera no es un cuerpo geométrico desarrollable, por lo que es más complicado que en los casos anteriores encontrar una fórmula para calcular su área.

Arquímedes demostró que el área de una esfera es igual que el área lateral de un cilindro circunscrito a la esfera, es decir un cilindro con el mismo radio de la base que el radio de la esfera y cuya altura es el diámetro de la esfera.

Si llamamos R al radio de la esfera:

$$A_T = (2\pi R)\cdot(2R) = \ 4\pi R^2$$

El área de una esfera equivale al área de cuatro círculos máximos.

Actividades propuestas

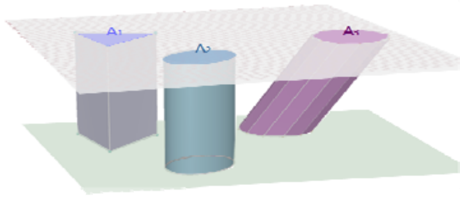
21. Una columna cilíndrica tiene 76 cm de diámetro y 4 m de altura. ¿Cuál es su área lateral?
22. El radio de la base de un cilindro es de 38 cm y la altura es el triple del diámetro. Calcula su área total.

Calcula el área lateral de un cono recto sabiendo que su generatriz mide 50 dm y su radio de la base 30 dm.

23. La circunferencia de la base de un cono mide 6, 25 m y su generatriz 8 m. Calcula el área total.
24. Una esfera tiene 4 m de radio. Calcula: a) la longitud de la circunferencia máxima; b) el área de la esfera.

5. VOLUMEN DE UN CUERPO GEOMÉTRICO

5.1. Principio de *Cavalieri*.



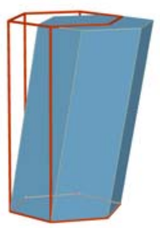
Bonaventura Cavalieri, matemático del siglo XVII enunció el principio que lleva su nombre y que afirma:

"Si dos cuerpos tiene la misma altura y al cortarlos por planos paralelos a sus bases, se obtienen secciones con el mismo área, entonces volúmenes de los dos cuerpos son iguales"

Ejemplo:

En la figura adjunta las áreas de las secciones A_1, A_2, A_3, producidas por un plano paralelo a las bases, son iguales, entonces, según este principio los volúmenes de los tres cuerpos son también iguales.

5.2. Volumen de un prisma y de un cilindro



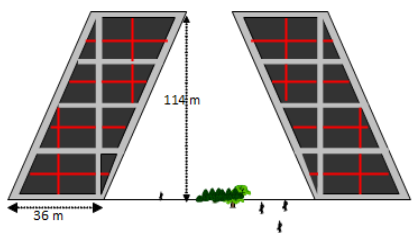
El volumen de un prisma recto es el producto del área de la base por la altura. Además, según el principio de *Cavalieri*, el volumen de un prisma oblicuo coincide con el volumen de un prisma recto con la misma base y altura. Si denotamos por V este volumen, A_B el área de la base y *h* la altura:

$$\text{Volumen prisma} = V = A_B \,.\, h$$

También el volumen de un cilindro, recto u oblicuo es área de la base por altura. Si llamamos *R* al radio de la base, A_B el área de la base y *h* la altura, el volumen se escribe:

$$\text{Volumen cilindro} = V = A_B \,.\, h \quad = \quad \pi R^2 \,.\, h$$

Actividades resueltas



- *Las conocidas torres Kio de Madrid son dos torres gemelas que están en el Paseo de la Castellana, junto a la Plaza de Castilla. Se caracterizan por su inclinación y representan una puerta hacia Europa. Cada una de ellas es un prisma oblicuo cuya base es un cuadrado de 36 metros de lado y tienen una altura de 114 metros. El volumen interior de cada torre puede calcularse con la fórmula anterior:*

$$V = A_B \,.\, h = 36^2 \cdot 114 = 147\ 744 \text{ m}^3$$

Actividades propuestas

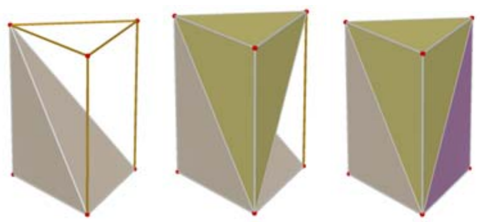
25. Calcula el volumen de un prisma recto de 12 dm de altura cuya base es un hexágono de 4 dm de lado.
26. Calcula la cantidad de agua que hay en un recipiente con forma de cilindro sabiendo que su base tiene 12 cm de diámetro y que el agua alcanza 1 dm de altura.

5.3. Volumen de una pirámide y de un cono

También en los casos de una pirámide o cono, las fórmulas del volumen coinciden en cuerpos rectos y oblicuos.

El volumen de una pirámide es la tercera parte del volumen de un prisma que tiene la misma base y altura.

$$\text{Volumen pirámide} = V = \frac{A_B \,.\, h}{3}$$



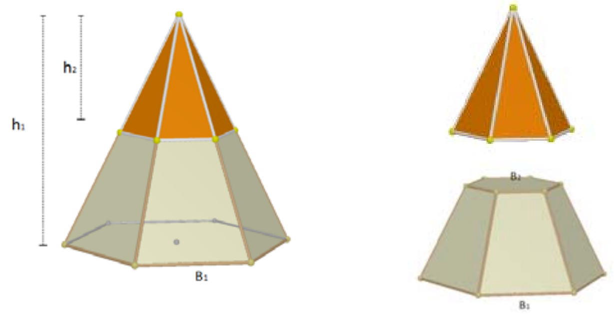
Si comparamos cono y cilindro con la misma base y altura, concluimos un resultado análogo

$$\text{Volumen cono} = V = \frac{A_B \,.\, h}{3} \quad = \quad \frac{\pi R^2 \,.\, h}{3}$$

5.4. Volumen de un tronco de pirámide y de un tronco de cono.

Existe una fórmula para calcular el volumen de un tronco de pirámide regular pero la evitaremos. Resulta más sencillo obtener el volumen de un tronco de pirámide regular restando los volúmenes de las dos pirámides a partir de las que se obtiene.

Si representamos por A_{B1} y A_{B2} las áreas de las bases y por h_1 y h_2 las alturas de las pirámides citadas, el volumen del tronco de pirámide es:



Volumen tronco de pirámide =

$$V = \frac{A_{B1}\,.\,h_1}{3} - \frac{A_{B2}\,.\,h_2}{3}$$

El volumen del tronco de cono se obtiene de modo parecido. Si R_1 y R_2 son los radios de las bases de los conos que originan el tronco y h_1 y h_2 sus alturas, el volumen del tronco de cono resulta:

$$\textit{Volumen tronco de cono} = V = \frac{\pi\,.\,R_1^2\,.\,h_1}{3} - \frac{\pi\,.\,R_2^2\,.\,h_2}{3}$$

Actividades resueltas

- *Calcula el volumen de un tronco de pirámide regular de 10 cm de altura si sus bases son dos hexágonos regulares de lados 8 cm y 3 cm.*

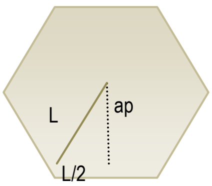
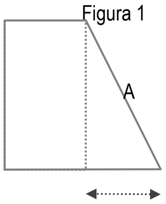


Figura 1



6,1-2,6= 3,5 cm.

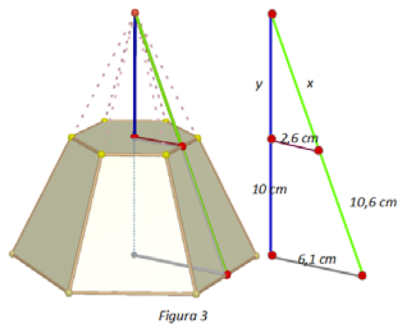
Primer paso: calculamos las apotemas de los hexágonos de las bases:

Para cada uno de estos hexágonos:

$$L^2 = ap^2 + (L/2)^2 \Rightarrow ap^2 = L^2 - \frac{L^2}{4} = \frac{3L^2}{4} \Rightarrow ap = \frac{\sqrt{3}\,L}{2}$$

Luego las apotemas buscadas miden: $ap_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2{,}6\,cm$

$ap_2 = \frac{7\sqrt{3}}{2} \approx 6{,}1\,cm$



Como segundo paso, calcularemos el apotema del tronco de pirámide: $A^2 = 10^2 + 3{,}5^2 \Rightarrow A = \sqrt{112{,}25} \approx 10{,}6\,cm$

En tercer lugar, calcularemos el valor de los segmentos *x*, *y* de la figura 3 que nos servirán para obtener las alturas y apotemas de las pirámides que generan el tronco con el que trabajamos:

27. Por el teorema de *Tales*: $\frac{x}{2{,}6} = \frac{10{,}6 + x}{6{,}1} \Rightarrow 6{,}1\,x = (10{,}6 + x)2{,}6 \Rightarrow 6{,}1\,x - 2{,}6x = 27{,}56 \Rightarrow x = \frac{27{,}56}{3{,}5} \approx 7{,}9\,cm$

Entonces la apotema de la pirámide grande es 10,6 + 7,9=18,5 cm y la de la pequeña 7,9 cm. Y aplicando el teorema de *Pitágoras*:

$$y^2 = x^2 - 2{,}6^2 = 7{,}9^2 - 2{,}6^2 = 55{,}65 \Rightarrow y = \sqrt{55{,}65} \approx 7{,}5 \text{ cm}$$

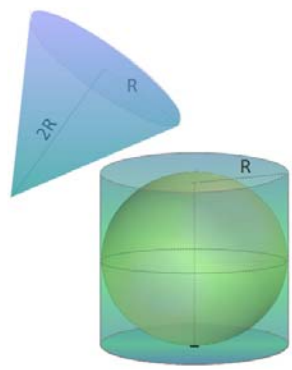
Luego las alturas de las pirámides generadoras del tronco miden 10 +7,5 = 17,5 cm y 7,5 cm

Por último calculamos el volumen del tronco de pirámide:

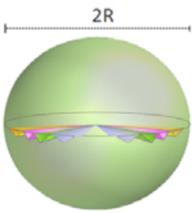
$$V = \frac{A_{B1}\,.\,h_1}{3} - \frac{A_{B2}\,.\,h_2}{3} = \frac{1}{3}.\frac{48.18{,}5.17{,}5}{2} - \frac{1}{3}.\frac{18.7{,}9.7{,}5}{2} = \frac{15540}{6} - \frac{1066.5}{6} = 2412{,}25\,cm^3$$

5.5. Volumen de la esfera

Volvamos a pensar en una esfera de radio *R* y en el cilindro que la circunscribe. Para rellenar con agua el espacio que queda entre el cilindro y la esfera, se necesita una cantidad de agua igual a un tercio del volumen total del cilindro circunscrito.



Se deduce entonces que la suma de los volúmenes de la esfera de radio *R* y del cono de altura *2R* y radio de la base *R*, coincide con el volumen del cilindro circunscrito a la esfera de radio *R*.



Por tanto:

Volumen $_{\text{esfera}}$ = Volumen $_{\text{cilindro}}$ - Volumen $_{\text{cono}}$ $\Rightarrow$

Volumen $_{\text{esfera}}$ = $\pi R^2(2R) - \frac{\pi R^2(2R)}{3} = \frac{6\pi R^3 - 2\pi R^3}{3} = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3$

Existen demostraciones más rigurosas que avalan este resultado experimental que hemos descrito. Así por ejemplo, el volumen de la esfera se puede obtener como suma de los volúmenes de pirámides que la recubren, todas ellas de base triangular sobre la superficie de la esfera y con vértice en el centro de la misma.

Actividades propuestas

28. (CDI Madrid 2008) El depósito de gasoil de la casa de Irene es un cilindro de 1 m de altura y 2 m de diámetro. Irene ha llamado al suministrador de gasoil porque en el depósito solamente quedan 140 litros.

a. ¿Cuál es, en dm^3, el volumen del depósito? (Utiliza 3,14 como valor de π).

b. Si el precio del gasoil es de 0,80 € cada litro, ¿cuánto deberá pagar la madre de Irene por llenar el depósito?

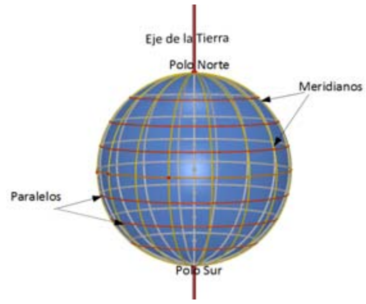
29. Comprueba que el volumen de la esfera de radio 5 dm sumado con el volumen de un cono del mismo radio de la base y 10 dm de altura, coincide con el volumen de un cilindro que tiene 10 dm de altura y 5 dm de radio de la base.

6. GLOBO TERRÁQUEO

6.1. El globo terráqueo

La Tierra tiene una forma de esfera algo achatada por los polos. En su movimiento de rotación gira alrededor de una línea imaginaria que se denomina *eje.* Los *polos geográficos Norte y Sur* son los puntos de corte del eje con la superficie de la Tierra.

Un *globo terráqueo* es una representación tridimensional a escala de la Tierra. Es la representación más precisa que existe porque no presenta distorsiones a la hora de tomar datos para calcular ángulos y distancias.



El resto de las representaciones a escala de la Tierra son bidimensionales y entre ellas destacan *los planisferios* que son proyecciones del globo terráqueo sobre el plano.

El objetivo de estas representaciones de la Tierra es la ubicación precisa de cualquier punto geográfico. Para lograrlo, en el globo terráqueo se definen un conjunto de líneas imaginarias que se denominan *meridianos* y *paralelos*.

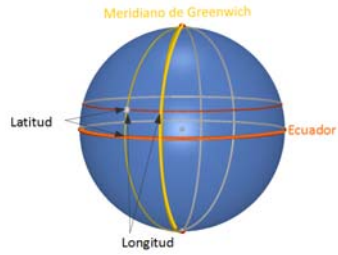
Los *meridianos* son semicircunferencias centradas en el centro de la Tierra y que pasan por los polos. Entre ellos destacan el llamado meridiano de Greenwich o meridiano cero que pasa por Londres y el Antimeridiano, ubicado en el Océano Pacífico.

Los *paralelos* son circunferencias que tienen su centro en el eje de la Tierra y que cortan al globo terráqueo. Sólo uno de ellos tiene como centro el de la Tierra. Se denomina *Ecuador o paralelo cero y* es una circunferencia de radio máximo.

Otros paralelos destacados son los *Trópicos de Cáncer* y *Capricornio*, cercanos al Ecuador en el norte y sur respectivamente y también el *Círculo Polar Ártico* en el Polo Norte y el *Círculo Polar Antártico* en el Polo Sur.

El Ecuador divide a la Tierra en dos semiesferas, denominadas *hemisferio norte* (N) y *hemisferio sur*(S). El meridiano de Greenwich divide a la Tierra en los *hemisferios este* (E) y *oeste* (W).

6.2. Longitud y latitud. Coordenadas geográficas.



Tomando como sistema de referencia el Ecuador y el meridiano de Greenwich, a cada punto de la Tierra se le asocia una pareja de números que son sus *coordenadas geográficas* y que reciben el nombre de *latitud y longitud*. Estas coordenadas se expresan en grados sexagesimales.

La *latitud* es la distancia que existe entre un punto cualquiera del globo terráqueo y el Ecuador. Se mide sobre el meridiano que pasa por dicho punto.

La *longitud* es la distancia que existe entre un punto cualquiera y el Meridiano de Greenwich, medida sobre el paralelo que pasa por el punto.

Si un punto está en el hemisferio norte, diremos que tiene latitud norte y escribiremos latitud N. Análogamente si está en el hemisferio sur, diremos que tiene latitud sur y escribiremos latitud S.

También hablaremos de longitud este y longitud oeste y escribiremos longitud E o longitud W dependiendo de que un punto se encuentre a la izquierda o derecha del meridiano de Greenwich. Suele identificarse la longitud E con longitud negativa y la longitud W con longitud positiva

6.3. Husos horarios

Durante mucho tiempo la hora se determinaba mediante cálculos basados en los movimientos de los astros y la hora oficial era la hora solar. Esto ocasionaba múltiples problemas en los horarios de los transportes entre diferentes localidades por lo que se acordó establecer un horario oficial coordinado. En un principio este horario estaba basado en la llamada hora media de *Greenwich* (GMT) que se calculaba haciendo la media de la hora solar de todas las localidades pertenecientes al meridiano de *Greenwich*. Hoy día la hora solar ha sido sustituida por la hora que calculan relojes atómicos mucho más precisos. Con ellos la hora GMT ha dado paso a la hora universal coordinada (UTC).

La Tierra da una vuelta completa en 24 horas, recorre 360 º : 24 = 15 º en una hora. Se produce entonces una diferencia de una hora de tiempo por cada diferencia de 15º de longitud entre dos puntos geográficos.

Se llama *huso horario* a una zona del globo terráqueo comprendida entre dos meridianos que se diferencian en 15º de longitud. La velocidad de la Tierra en su movimiento de rotación origina 24 *husos horarios*. Partiendo del meridiano de *Greenwich* se numeran según su distancia al Este o al Oeste de Greenwich.

Dentro de cada huso horario todos los relojes deben marcar la misma hora, y entre un huso y el siguiente hay una diferencia de una hora. Generalmente, los husos horarios están determinados por meridianos de una longitud que es múltiplo de 15°; sin embargo, como consecuencia de las fronteras políticas, las delimitaciones pueden seguir líneas que adoptan formas muy irregulares.

Teniendo en cuenta que el movimiento de rotación es un giro de oeste a este, si nos desplazamos de un huso horario a otro en dirección Este- Oeste, debemos retrasar el reloj una hora y, si el desplazamiento se produce de Oeste a Este debemos adelantarlo una hora.

Atravesar el Antimeridiano supone el cambio de fecha, exactamente un día.

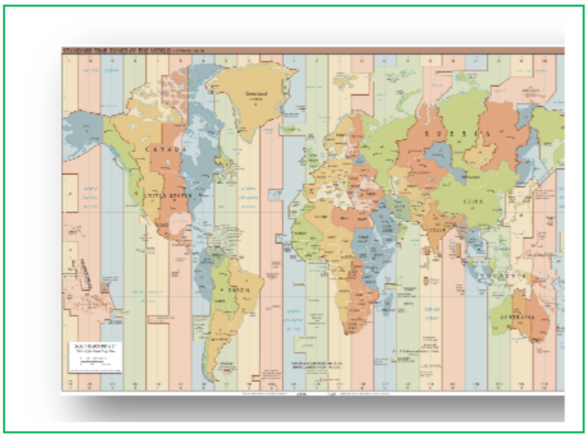
Actividades propuestas

30. Un avión recorre 20º en dirección Oeste a lo largo del Ecuador. Si llega a un punto cuya longitud es de 170º Este, ¿cuáles son las coordenadas del lugar de partida?

31. Juan sale de su casa y recorre 10 Km en dirección sur, 20 Km hacia el este y 10 Km hacia el norte. Si se encuentra de nuevo en casa, ¿Dónde está situada su casa?

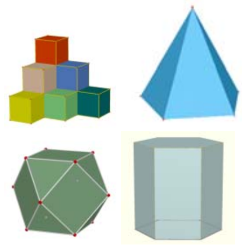
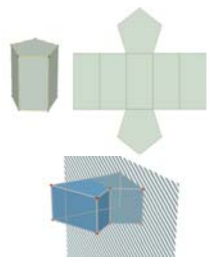
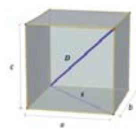
32. En la esfera terrestre, ¿qué paralelo mide más?, ¿qué meridiano mide más? Razona tus respuestas.

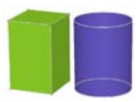
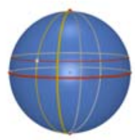
33. Busca las coordenadas geográficas del lugar en el que vives.



MAPA DE HUSOS HORARIOS DE 30 MARZO 2014 (ORIGEN DE LA IMAGEN: WIKIPEDIA)

RESUMEN

		Ejemplos
Poliedro. Elementos de un poliedro. Tipos de poliedros	Un poliedro es una región cerrada del espacio limitada por polígonos. Sus principales elementos son: caras, aristas, vértices, ángulos diedros y poliedros, así como las diagonales. Los poliedros pueden ser cóncavos y convexos dependiendo de que alguna de sus caras sea un polígono cóncavo o ninguna lo sea. Entre los poliedros destacan poliedros regulares, prismas y pirámides.	
Teorema de Euler:	En todo poliedro convexo el número de caras más el número de vértices coincide con el número de aristas más 2.	C + V=A+2
Poliedros regulares	Un poliedro regular es un poliedro que cumple que todas sus caras son polígonos regulares iguales y que sus ángulos poliedros son iguales. Hay cinco poliedros regulares: tetraedro, octaedro, icosaedro, cubo y dodecaedro	
Prismas	Un prisma es un poliedro determinado por dos caras paralelas que son polígonos iguales y tantas caras laterales, que son paralelogramos, como lados tienen las bases. Pueden ser cóncavos o convexos; rectos u oblicuos, regulares o irregulares; triangulares, cuadrangulares, pentagonales… Destacan los paralelepípedos que son prismas con todas sus caras paralelogramos y dentro de éstos los ortoedros que son paralelepípedos con todas sus caras rectangulares	
Teorema de Pitágoras en el espacio	La diagonal de un ortoedro es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de sus aristas	
Pirámides	Una pirámide es un poliedro determinado por una cara poligonal denominada base y tantas caras triangulares con un vértice común, como lados tiene la base. Pueden ser cóncavas o convexas; rectas u oblicuas, regulares o irregulares; triangulares, cuadrangulares, pentagonales…	
Tronco de pirámide	Un tronco de pirámide es el poliedro resultante al cortar una pirámide por un plano paralelo a la base. Las bases son polígonos semejantes y las caras laterales son trapecios.	
Cuerpos de revolución	Los cuerpos de revolución son cuerpos geométricos que se obtienen al hacer girar una línea alrededor de una recta fija denominada *eje*. La línea que gira se llama *generatriz*. Entre los cuerpos de revolución destacan cilindros, conos y esferas.	
Áreas lateral y total de un prisma	$A_{Lateral} = Perímetro_{Base} \cdot Altura$ $A_{total} = Área_{Lateral} + 2Área_{Base}$	
Áreas lateral y total de una pirámide regular	$A_{Lateral} = \frac{Perímetro_{Base} \cdot Apotema_{pirámide}}{2}$ $A_{total} = Área_{Lateral} + Área_{Base}$	

Áreas lateral y total de un tronco de pirámide regular	$A_{Lateral} = \frac{Perímetro_{\ Base} \ . \ Apotema_{\ tronco}}{2}$ $A_{total} = Área_{\ Lateral} + Área_{\ Base\ 1} + Área_{\ Base\ 2}$	
Áreas lateral y total de un cilindro	$A_{Lateral} = 2\pi R H$ $A_{total} = 2\pi R H + 2\pi R^2$	
Áreas lateral y total de un cono	$A_{Lateral} = \pi R G$ $A_{total} = \pi R G + \pi R^2$	
Áreas lateral y total de un tronco de cono	$A_{Lateral} = (\pi R + \pi r) G$ $A_{Total} = A_{Lateral} + \pi R^2 + \pi r^2$	
Área y volumen de una esfera	$A_{total} = 4\pi R^2 ; Volumen = \frac{4}{3}\pi R^3$	
Volumen de un prisma y de un cilindro	$Volumen = Área_{\ base} \ . \ Altura$	
Volumen de una pirámide y de un cono	$Volumen = \frac{Área_{\ base} \ . \ Altura}{3}$	
Coordenadas geográficas	**Latitud**: Distancia del punto geográfico al Ecuador medida sobre el meridiano que pasa por el punto. **Longitud:** Distancia del punto geográfico al meridiano cero o de Greenwich, medida sobre el paralelo que pasa por el punto.	
Husos horarios	Cada **huso horario** es una zona del globo terráqueo comprendida entre dos meridianos que se diferencian en 15º de longitud.	

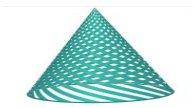
EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

Ángulos poliedros. Paralelismo y perpendicularidad. Poliedros: elementos y tipos.

1. Si estamos en una habitación sin columnas, atendiendo al suelo y a sus cuatro paredes, ¿cuántos ángulos diedros se forman?
2. Dobla por la mitad una hoja de papel, construye un ángulo diedro y traza su rectilíneo. ¿Podrías medir la amplitud de diferentes ángulos diedros mediante este rectilíneo?
3. Determina la amplitud de los ángulos diedros que forman las caras laterales de un poliedro que es un prisma recto de base un octógono regular.
4. Dos caras de un triedro miden 60º y 118º, ¿Entre qué valores puede oscilar la otra?
5. ¿Se puede formar un ángulo poliedro con un ángulo de un triángulo equilátero, dos ángulos de un rectángulo y uno de un pentágono regular?
6. ¿Podrá existir un poliedro regular cuyas caras sean hexagonales? Razona la respuesta.
7. ¿Cuántas diagonales puedes trazar en un cubo? ¿Y en un octaedro?
8. ¿Puedes encontrar dos aristas paralelas en un tetraedro? ¿Y en cada uno de los restantes poliedros regulares?
9. Prolonga una pareja de aristas en una pirámide pentagonal, de modo que se obtengan rectas no coplanarias.
10. Dibuja un prisma regular de base cuadrada y señala: a) dos aristas que sean paralelas, b) dos aristas que sean

perpendiculares y coplanarias, c) dos aristas perpendiculares y no coplanarias, d) dos caras paralelas, e) dos caras perpendiculares.

11. Si un poliedro convexo tiene 16 vértices y 24 aristas, ¿cuántas caras tiene? ¿Podría ser una pirámide? ¿Y un prisma?
12. Con 12 varillas de 5 cm de largo cada una, usando todas las varillas ¿qué poliedros regulares se pueden construir?
13. De un prisma sabemos que el número de vértices es 16 y que el número de aristas es 24, ¿cuántas caras tiene?
14. Clasifica los siguientes cuerpos geométricos e indica, cuando sean poliedros, el número de vértices, caras y aristas que tienen. ¿Cuáles cumplen el teorema de Euler?





15. Describe la diferencia entre un prisma recto y un prisma oblicuo. ¿Es suficiente que un paralelepípedo tenga dos caras paralelas rectangulares para que sea un ortoedro?

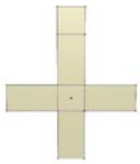
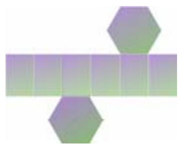
Teorema de Pitágoras en el espacio

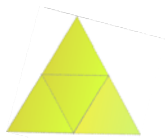
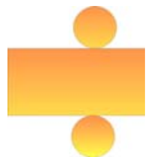
16. Dibuja un paralelepípedo cuyas aristas midan 4 cm, 5 cm y 6 cm que no sea un ortoedro. Dibuja también su desarrollo.
17. Si el paralelepípedo anterior fuera un ortoedro, ¿cuánto mediría su diagonal?
18. Un vaso de 12 cm de altura tiene forma de tronco de cono en el que los radios de las bases son de 5 y 4 cm. ¿Cuánto ha de medir como mínimo una cucharilla para que sobresalga del vaso por lo menos 2 cm?

19. ¿Es posible guardar en una caja con forma de ortoedro de aristas 4 cm, 3 cm y 12 cm un bolígrafo de 13 cm de longitud?
20. Calcula la diagonal de un prisma recto de base cuadrada sabiendo que el lado de la base mide 6 cm y la altura del prisma 8 cm.
21. Si un ascensor mide 1 m de ancho, 1,5 m de largo y 2,2 m de altura, ¿es posible introducir en él una escalera de 3 m de altura?
22. ¿Cuál es la mayor distancia que se puede medir en línea recta en una habitación que tiene 6 m de ancho, 8 m de largo y 4 metros de altura ?
23. Calcula la longitud de la arista de un cubo sabiendo que su diagonal mide 3,46 cm.
24. Calcula la distancia máxima entre dos puntos de un tronco de cono cuyas bases tienen radios 5 cm y 2 cm, y altura 10 cm.

Área lateral, total y volumen de cuerpos geométricos

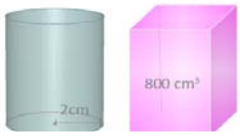
25. Identifica a qué cuerpo geométrico pertenecen los siguientes desarrollos:

26. Un prisma de 8 dm de altura tiene como base un triángulo rectángulo de catetos 3 dm y 4 dm. Calcula las áreas lateral y total del prisma.
27. Dibuja un prisma hexagonal regular que tenga 4 cm de arista basal y 1 dm de altura y calcula las áreas de la base y total.
28. Un prisma pentagonal regular de 12 cm de altura tiene una base de 30 cm^2 de área. Calcula su volumen.
29. Calcula el área total de un ortoedro de dimensiones 3,5 dm, 8,2 dm y 75 cm.
30. Calcula la superficie total y el volumen de un cilindro que tiene 8 m de altura y 5cm de radio de la base.
31. Calcula el área total de una esfera de 5 cm de radio.
32. Calcula el apotema de una pirámide regular sabiendo que su área lateral es de 120 m^2 y su base es un hexágono de 5 m de lado.

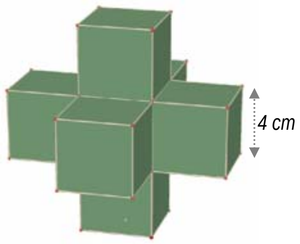
33. Calcula el apotema de una pirámide hexagonal regular sabiendo que el perímetro de la base es de 32 dm y la altura de la pirámide es de 4 dm. Calcula también el área total y el volumen de esta pirámide.
34. Un triángulo rectángulo de catetos 12 cm y 5 cm gira alrededor de uno de sus catetos generando un cono. Calcula el área lateral, el área total y el volumen.
35. Tres bolas de metal de radios 12 dm, 0,3 m y 4 m se funden en una sola, ¿Cuál será el diámetro de la esfera resultante?
36. ¿Cuál es la capacidad de un pozo cilíndrico de 1,20 m de diámetro y 20 metros de profundidad?
37. ¿Cuánto cartón necesitaremos para construir una pirámide cuadrangular regular si queremos que el lado de la base mida 10 cm y que su altura sea de 25 cm?

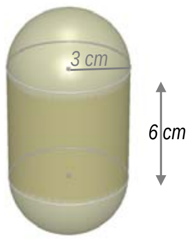


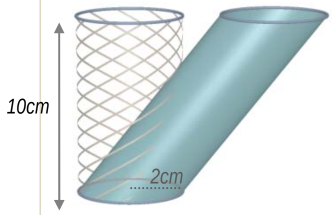
38. Calcula el volumen de un cilindro que tiene 2 cm de radio de la base y la misma altura que un prisma cuya base es un cuadrado de 4 cm de lado y 800 cm3 de volumen.
39. ¿Cuál es el área de la base de un cilindro de 1,20 m de alto y 248 dm^3 de volumen?
40. El agua de un manantial se conduce hasta unos depósitos cilíndricos que miden 12 m de radio de la base y 20 m de altura. Luego se embotella en bidones de 2,5 litros. ¿Cuántos envases se llenan con cada depósito?

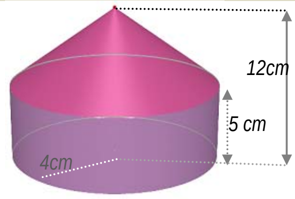
41. Calcula la cantidad de cartulina necesaria para construir un anillo de 10 tetraedros cada uno de los cuales tiene 2 cm de arista.
42. Al hacer el desarrollo de un prisma triangular regular de 8 dm de altura, resultó un rectángulo de 1 metro de diagonal como superficie lateral. Calcula el área total.
43. Determina la superficie mínima de papel necesaria para envolver un prisma hexagonal regular de 1 m de lado de la base y 2 m de altura.

44. El ayuntamiento de Madrid ha colocado unas jardineras de piedra en sus calles que tienen forma de prisma hexagonal regular. La cavidad interior, donde se deposita la tierra, tiene 80 cm de profundidad y el lado del hexágono interior es de 60 cm. Calcula el volumen de tierra que llenaría una jardinera por completo.
45. Una habitación tiene forma de ortoedro y sus dimensiones son directamente proporcionales a los números 3, 5 y 7. Calcula el área total y el volumen si además se sabe que la diagonal mide 14,5 m.
46. Un ortoedro tiene 1 dm de altura y 6 dm^2 de área total. Su longitud es el doble de su anchura, ¿cuál es su volumen?
47. Si el volumen de un cilindro de 10 cm de altura es de 314 cm^3, calcula el radio de la base del cilindro. (Utiliza 3,14 como valor de π).
48. (CDI Madrid 2011) Han instalado en casa de Juan un depósito de agua de forma cilíndrica. El diámetro de la base mide 2 metros y la altura es de 3 metros. a) Calcula el volumen del depósito en m^3. (Tomar π=3,14). b) ¿Cuántos litros de agua caben en el depósito?
49. (CDI Madrid 2012) Un envase de un litro de leche tiene forma de prisma, la base es un cuadrado que tiene 10 cm de lado. a) ¿Cuál es, en cm^3, el volumen del envase? b) Calcula la altura del envase en cm.
50. Una circunferencia de longitud 2,24 cm gira alrededor de uno de sus diámetros generando una esfera. Calcula su volumen. (Tomar π=3,14).
51. Una puerta mide 2 m de alto, 80 cm de ancho y 4 cm de espesor. El precio de instalación es de 200 € y se cobra 6 € por m^2 en concepto de barnizado, además del coste de la madera, que es de 300 € cada m^3. A) Calcula el volumen de madera de una puerta. B) El coste de la madera de una puerta más su instalación. C) El coste del barnizado de cada puerta, si sólo se cobra el barnizado de las dos caras principales.
52. El agua contenida en un recipiente cónico de 18 cm de altura y 24 cm de diámetro de la base se vierte en un vaso cilíndrico de 10 cm de diámetro. ¿Hasta qué altura llegará el agua?
53. Según Arquímedes ¿qué dimensiones tiene el cilindro circunscrito a una esfera de 5 cm de radio que tiene su misma área? Calcula esta área.
54. ¿Cuál es el volumen de una esfera en la que una circunferencia máxima mide 31,40 m?
55. Calcula el área lateral y el volumen de los siguientes cuerpos geométricos

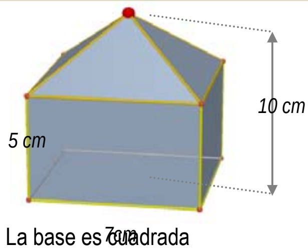




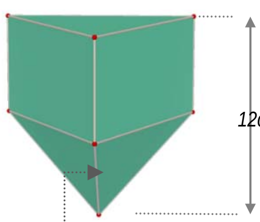




56. Calcula el área lateral y el volumen de los siguientes cuerpos geométricos



La base es cuadrada

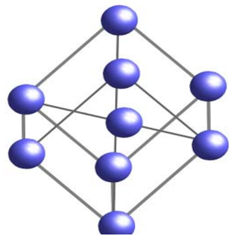


Tetraedro de 5cm de arista

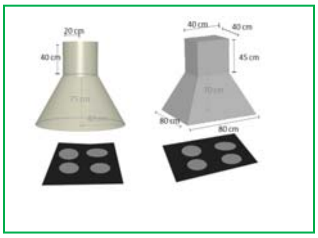
Octaedro de 6cm de arista

Pirámides construidas en el interior de una estructura cúbica de 5 dm de arista.

57. En la construcción de un globo aerostático de radio de 2,5 m se emplea lona que tiene un coste de 300 €/m². Calcula el importe de la lona necesaria para su construcción.
58. Calcula el radio de una esfera que tiene 33,51 dm³ de volumen.



59. El Atomium es un monumento de Bruselas que reproduce una molécula de hierro. Consta de 9 esferas de acero de 18 m de diámetro que ocupan los vértices y el centro de una estructura cúbica de 103 m de diagonal, realizada con cilindros de 2 metros de diámetro. Si utilizamos una escala 1:100 y tanto las esferas como los cilindros son macizos, ¿qué cantidad de material necesitaremos?
60. Se ha pintado por dentro y por fuera un depósito sin tapadera de 8 dm de alto y 3 dm de radio. Teniendo en cuenta que la base sólo se puede pintar por dentro, y que se ha utilizado pintura de 2€/dm², ¿cuánto dinero ha costado en total?
61. Una piscina mide 20 m de largo, 5 m de ancho y 2 m de alto.
    a. ¿Cuántos litros de agua son necesarios para llenarla?
    b. ¿Cuánto costará recubrir el suelo y las paredes con PVC si el precio es de 20 €/ m²?
62. ¿Cuál de las dos campanas extractoras de la figura izquierda tiene un coste de acero inoxidable menor?



63. En una vasija cilíndrica de 8 dm de diámetro y que contiene agua, se introduce una bola. ¿Cuál es su volumen si después de la inmersión sube 0,3 metros el nivel del agua?
64. El precio de las tejas es de 14,30 €/m² ¿Cuánto costará retejar una vivienda cuyo tejado tiene forma de prisma cuadrangular regular de 4 metros de altura y 8 metros de lado de la base?
65. Se enrolla una cartulina rectangular de lados 30 cm y 25 cm de las dos formas posibles, haciendo coincidir lados opuestos. ¿Cuál de los dos cilindros resultantes tiene mayor volumen?

66. Cada uno de los cubos de la figura tiene 2 cm de arista. ¿Cuántos hay que añadir para formar un cubo de 216 cm³ de volumen?
67. Un tubo de ensayo tiene forma de cilindro abierto en la parte superior y rematado por una semiesfera en la inferior. Si el radio de la base es de 1,5 cm y la altura total es de 15 cm, calcula cuántos centilitros de líquido caben en él.
68. El cristal de una farola tiene forma de tronco de cono de 50 cm de altura y bases de radios 20 y 30 cm. Calcula su superficie.

69. Un bote cilíndrico de 10 cm de radio y 40 cm de altura tiene en su interior cuatro pelotas de radio 3,5 cm. Calcula el espacio libre que hay en su interior.
70. Construimos un cono con cartulina recortando un sector circular de 120º y radio 20 cm. Calcula el volumen del cono resultante.
71. Un embudo cónico de 20 cm de diámetro ha de tener 2 litros de capacidad, ¿cuál será su altura?
72. En un depósito con forma de cilindro de 25 cm de radio, un grifo vierte 15 litros de agua cada minuto. ¿Cuánto aumentará la altura del agua después de un cuarto de hora?

73. La lona de una sombrilla abierta tiene forma de pirámide octogonal regular de 1 m de altura y 45 cm de lado de la base. Se fija un mástil en el suelo en el que se encaja y el vértice de la pirámide queda a una distancia del suelo de 1,80 m. En el momento en que los rayos de sol son verticales, ¿qué espacio de sombra determina?
74. Una pecera con forma de prisma recto y base rectangular se llena con 56 litros de agua. Si tiene 48 cm de largo y 36 cm de ancho, ¿cuál es su profundidad?
75. Si se enrolla una cartulina rectangular de lados 30 cm y 25 cm de las dos formas posibles, ¿cuál de los dos cilindros resultantes tiene mayor volumen?
76. Un rectángulo de 1 m de base y 10 m de altura gira 360º alrededor de una recta paralela a la altura, que está situada a 2 m de distancia. Calcula la superficie y el volumen del cuerpo que resulta.
77. En un helado de cucurucho la galleta tiene 15 cm de altura y 5 cm diámetro. ¿Cuál es su superficie? Si el cucurucho está completamente lleno de helado y sobresale una semiesfera perfecta, ¿cuántos gramos de helado contiene?

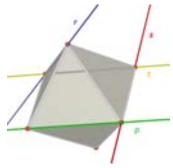
Husos horarios

78. ¿Qué diferencia de longitud existe entre dos ciudades si la diferencia horaria entre ambas es de 5 horas? ¿Podemos saber si existe diferencia entre sus latitudes?
79. Un avión emprende viaje hacia una ciudad situada al oeste de Madrid. El viaje dura 10 horas y su rumbo mantiene en todo momento la latitud de partida. Si la diferencia de longitud entre Madrid y la ciudad de llegada es de 45º y el avión despega del aeropuerto Adolfo Suárez a las 9 de la mañana. ¿A qué hora local aterrizará en la ciudad de destino?

80. La distancia entre Londres y Pekín es de 8149 Km y la distancia entre Londres y Sao Paulo es de 9508 Km, sin embargo en Pekín el reloj marca 7 horas más que en Londres y en Sao Paulo 3 horas menos que en Londres. ¿Cómo explicas esta diferencia?

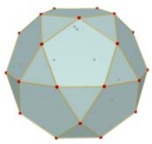
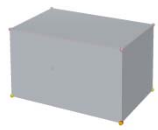
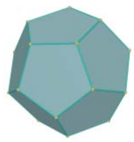
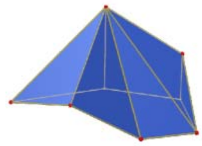
CIUDAD	LONGITUD	LATITUD
LONDRES	0º	51º 30´latitud N
PEKIN	116º longitud E	40º latitud N
SAO PAULO	46º 30´de longitud W	23º 30´de latitud S

AUTOEVALUACIÓN



1. Cada una de las rectas r, s, t y p pasa por dos vértices consecutivos de un octaedro tal como se observa en la figura. Señala qué afirmación de las siguientes es verdadera:
a) Las rectas r y s son coplanarias y secantes. **b)** Las rectas t y p no son coplanarias. **c)** Las rectas r y p se cruzan. **d)** r y s contienen aristas de una misma cara del octaedro

2. Observa los siguientes cuerpos geométricos y selecciona la opción verdadera:

I)	II)	III)	IV)	V)	VI)
					

a) Los cuerpos I), II), IV) y V) cumplen la relación de Euler. **b)**. Hay dos cuerpos de revolución III) y VI). **c)** Son poliedros regulares II) y IV). **d)** Son cóncavos I) y V).

3. Si la altura de un prisma de base cuadrada es 10 cm y el lado de la base es 4 cm, su área total es:
a) 160 cm^2 **b)** 320 cm^2 **c)** 400 cm^2 **d)** 192 cm^2

4. Un depósito de agua tiene forma de prisma hexagonal regular de 5 m de altura y lado de la base 1 m. Si sólo contiene las tres cuartas partes de su capacidad, el número aproximado de litros de agua que hay en él es:
a) 13000 L **b)** 9750 L **c)** 3750 L **d)** 3520 L

5. El tejado de una caseta tiene forma de pirámide cuadrangular regular de 1,5 m de altura y 80 cm de lado de la base. Si se necesitan 15 tejas por metro cuadrado para recubrir el tejado, en total se utilizarán:
a) 38 tejas **b)** 76 tejas **c)** 72 tejas **d)** 36 tejas

6. Una caja de dimensiones $30 \times 20 \times 15 \quad cm$, está llena de cubos de 1 *cm* de arista. Si se utilizan todos para construir un prisma recto de base cuadrada de 10 *cm* de lado, la altura medirá:
a) 55 cm **b)** 65 cm **c)** 75 cm **d)** 90 cm

7. El radio de una esfera que tiene el mismo volumen que un cono de 5 dm de radio de la base y 120 cm de altura es:
a) $5\sqrt{3}$ dm **b)** $\sqrt[3]{75}$ dm **c)** 150 cm **d)** $\sqrt[3]{2250}$ cm

8. Se distribuyen 42,39 litros de disolvente en latas cilíndricas de 15 cm de altura y 3 cm de radio de la base. El número de envases necesario es:
a) 100 **b)** 10 **c)** 42 **d)** 45

9. El área lateral de un tronco de cono que tiene 20 cm de altura y bases de radios 30 y 15 cm, es:
a) 2250 π cm^2 **b)** 900 π cm^2 **c)** 1125 π cm^2 **d)** 450 π cm^2

10. A partir de las coordenadas geográficas de las ciudades A, B , C deduce qué afirmación es correcta

CIUDAD	LONGITUD	LATITUD
A	15º E	15º N
B	15º W	15º N
C	15º E	15º S

a) Las ciudades A y B tienen la misma hora y la ciudad C dos horas menos. **b)** Las ciudades A y B tienen la misma hora y la ciudad C dos horas más. **c)** Las ciudades A y C tienen la misma hora y la ciudad B dos horas más. **d)** Las ciudades A y C tienen la misma hora y la ciudad B dos horas menos.

CAPÍTULO 10: FUNCIONES Y GRÁFICAS.

Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas: 3ºB de ESO

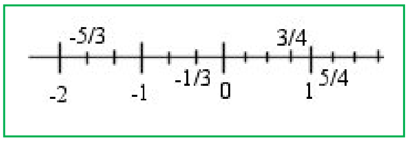
1. SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN EN EL PLANO.

1.1. Ejes de coordenadas o cartesianos.

Recuerda que:

Cuando queremos representar gráficamente un número, normalmente los dibujamos sobre una recta, llamada *recta numérica*, en la cual establecemos un punto de referencia, que es el 0, a partir del cual trazamos los números positivos (hacia la derecha) y los negativos (hacia la izquierda).

Pues bien, si estamos trabajando con una única variable que toma valores numéricos y los queremos representar, lo haremos igualmente sobre dicha recta.



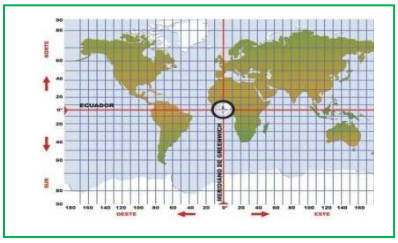
Es importante hacer notar que, como tenemos una única variable, necesitamos una única recta y, por tanto, estamos trabajando con una única dimensión (longitud).

En el plano:

Ahora bien, si trabajamos con objetos de dos dimensiones, en el plano, necesitamos dos valores para referirnos a ellos, ya que están determinados por su longitud y su anchura, que no tienen por qué ser iguales y que siguen direcciones diferentes.

Ejemplo:

- *En un mapa, para poder situar un punto cualquiera (por ejemplo, una ciudad), tenemos una referencia a partir de la cual tomar las medidas: el paralelo del Ecuador y el meridiano de Greenwich. Ambos se cortan en un punto, que es el origen de este sistema de referencia:*



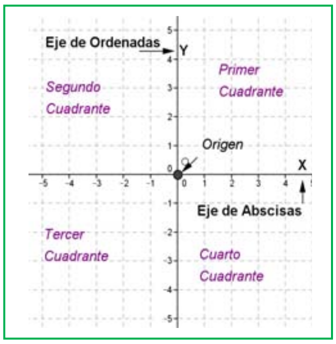
De igual forma, si tenemos dos variables *que están relacionadas de alguna manera,* que toman valores numéricos y los queremos dibujar, tendremos que utilizar dos rectas o ejes diferentes (cada uno para los datos correspondientes a una variable) y que sean secantes, es decir, se cortan en un punto (sin el cual no se podría establecer la relación entre ambas).

Si las rectas se cortan de forma perpendicular, es más sencillo establecer la conexión entre valores, y las medidas que se representan en cada eje (salvo escalas) se pueden corresponder de forma directa con la realidad, por lo que siempre se suelen dibujar de esta forma (formando un ángulo de 90º entre sí).

El sistema de representación de puntos en el plano más común está formado por dos ejes perpendiculares, uno horizontal llamado ***eje de abscisas***, donde se representan los valores de la variable independiente (que toma los valores libremente, y que suele llamarse "*x*"), y otro vertical llamado ***eje de ordenadas***, donde se representan los valores de la variable dependiente (porque se calculan a partir de la otra, y que suele llamarse "*y*"). Ambos reciben el nombre de ***ejes de coordenadas*** o ***ejes cartesianos*** (en honor del famoso filósofo y matemático francés Renè Descartes). El punto donde se cortan ambos ejes se llama ***origen de coordenadas*** y, al cortarse los dos ejes, el plano queda dividido en cuatro zonas, que se conocen como cuadrantes, y que se nombran en el sentido contrario a las agujas del reloj empezando desde la parte positiva del eje de abscisas.

Un conjunto formado por el origen *O*, los dos ejes de coordenadas y la unidad de medida es un **sistema de referencia cartesiano**.

1.2. Coordenadas cartesianas.



Una vez establecido el sistema de referencia con respecto al cual poder situar los puntos, para llegar a uno en concreto partimos del origen, "O", recorremos una determinada cantidad hacia la derecha o la izquierda y luego otra hacia arriba o hacia abajo. Así cada punto queda determinado por un par de números, la medida de los caminos realizados en ambas direcciones, a los que llamamos **coordenadas del punto**.

Ejemplo:

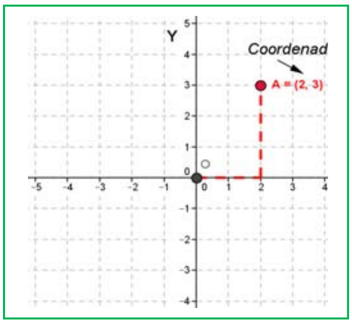
- *En un mapa como el del ejemplo anterior, un punto queda determinado por su latitud (distancia al Ecuador, medida sobre el meridiano que pasa por dicho punto) y la longitud (distancia al Meridiano de Greenwich, medida sobre el paralelo que pasa por dicho punto), llamadas coordenadas geográficas. Por ejemplo, la situación de Madrid es (–3,41; 40,24):*

Longitud –3,41 o 3,41 O, es decir, hay que trasladarse 3,41 hacia el oeste (izquierda) del meridiano de Greenwich.

Latitud +40,24 o 40,24 N, es decir, hay que trasladarse 40,24 hacia el norte (por encima) del Ecuador.

Las **coordenadas** de un punto *A* son un par ordenado de números reales (*x*, *y*), siendo "***x***" la primera coordenada o **abscisa** (nos indica la distancia a la que dicho punto se encuentra del eje vertical) e "***y***" la segunda coordenada u **ordenada** (nos indica la distancia a la que dicho punto se encuentra del eje horizontal).

Cuando ese valor se toma hacia la izquierda o hacia abajo lo indicamos con un número **negativo** y si es hacia arriba o a la derecha lo indicamos con uno **positivo**, de la misma manera que hacíamos al representar los números en la recta.



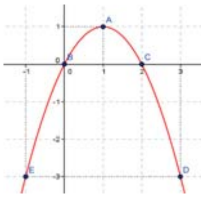
De esta forma, cualquier punto del plano queda totalmente determinado mediante sus coordenadas y viceversa, a toda pareja ordenada de números le corresponde un punto del plano.

Ejemplo:

- *En el gráfico anterior, el punto A tiene coordenadas (2, 3).*

Actividades resueltas

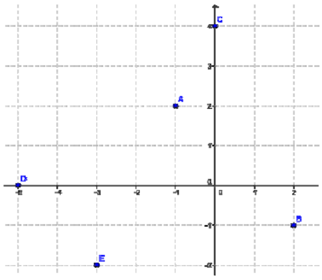
- *En la siguiente gráfica, indica las coordenadas de los puntos señalados:*



A(1, 1)
B(0, 0)
C(2, 0)
D(3, –3)
E(–1, –3)

- *Representa gráficamente los puntos*:

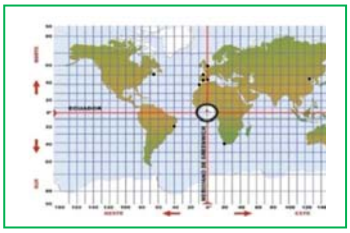
$A(-1,2); B(2,-1); C(0,4);$
$D(-5,0); E(-3,-2)$



Actividades propuestas

1. Fíjate en el mapa siguiente, localiza los países o ciudades que se piden e indica en tu cuaderno:

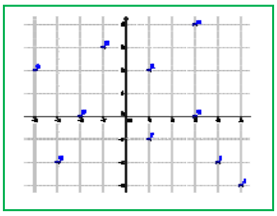
   a) Los cuadrantes donde se encuentran los siguientes países:



- Méjico:
- Madagascar:
- India:
- Chile:
- España:
- Argentina:
- Australia:
- Japón:
- Arabia Saudí:
- Alemania:
- EEUU:
- Marruecos:

   b) Las coordenadas (aproximadas) de las siguientes ciudades:

- Ciudad del Cabo
- Nueva York:
- Río de Janeiro:
- Alicante
- Pekín:
- Rabat:
- Sídney:
- Londres:
- Córdoba:
- Oviedo:



2. Copia en tu cuaderno e indica las coordenadas de todos los puntos que están señalados en el plano:
3. Represente gráficamente en tu cuaderno los siguientes puntos del plano:

A (0,-2) *B* (-2,0) *C* (4,0) *D* (-6,0) *E* (0,6) *F* (1,7) *G* (7,1) *H* (-4,8) *I* (-1,-4) *J* (-4,-1)

K (5,-3) *L* (9,6) *M* (-2,1) *N* (7,-4) *Ñ* (-3,-3) *O(0,0)* *P(-2,-1)* *Q*(2,1) *R*(2,-1) *S*(-2,1)

2. FUNCIONES

2.1. Concepto intuitivo de función.

Existen multitud de fenómenos en nuestra vida cotidiana en los que aparecen relacionadas dos magnitudes. Por ejemplo, el precio de un billete en un medio de transporte y la distancia o tiempo de duración del viaje, el precio de un kilo de fruta o carne y el número de kilos que compramos, la duración de un trayecto y la velocidad a la que vamos, el número de latidos del corazón en una unidad de tiempo…

Muchas de esas relaciones se rigen por una ley de proporcionalidad, directa o inversa, pero hay otras muchas en las que la correspondencia entre ambas magnitudes es más compleja.

Una **función** es una relación entre dos magnitudes de forma que a un valor cualquiera de una (**variable independiente**) le hacemos corresponder, como mucho, un único valor de la otra (**variable dependiente**).

Esta relación funcional se puede establecer, muchas veces, mediante una expresión matemática o fórmula, lo que nos permitirá trabajar de forma cómoda con ella. Otras veces viene dada mediante una tabla donde aparecen los valores relacionados entre sí. En ocasiones tenemos la relación en forma de gráfica… ¡Y también existen funciones que no se pueden escribir mediante una expresión algebraica!

Ejemplos:

- *Un kilo de tomates cuesta* 0,59 €/kg. *La función que establece cuánto debemos pagar en función de la cantidad de tomates que nos llevamos es y = f(x)* = 0,59 *x.*

En ella, ***f*** es el nombre que le ponemos a la función y podríamos llamarla usando otras letras (las que se usan más frecuentemente son "*f*", "*g*" y "*h*"). Entre paréntesis va la variable "*x*" que representa el número de kilos que compramos, y es la variable independiente puesto que nosotros elegimos libremente la cantidad que queremos o necesitamos. Por último, la variable "*y*" representa el precio que debemos pagar, y es la variable dependiente puesto que "depende" de cuántos kilos nos llevamos, es decir, de "*x*".

La expresión, *f*(x) que se lee "*f* de *x*", se suele usar con mucha frecuencia para designar a la variable dependiente porque:

1º) en ella se ve cuál es la variable independiente y, por tanto:

2º) resulta muy cómodo escribir cuánto nos costaría comprar una cantidad concreta, por ejemplo, 2 kg. Se expresaría "*f* de *2*" y su valor es *f*(2) = 0,59·2 = *1,18 €*.

- *Una persona que va paseando siempre a la misma velocidad, quiere recorrer una calle recta de 1 km en un tiempo determinado. La relación entre el tiempo que tardará (en segundos) y la velocidad que lleva (en metros por segundo) viene dada por la fórmula* $v(t)=\frac{\mathbf{1000}}{t}$.

En ella, "*v*" es el nombre de la función velocidad, 1000 son los metros que tiene que recorrer y "*t*" el tiempo que tarda en recorrer dicho espacio.

Todos los números decimales tienen su parte entera y su parte decimal. Pues bien, todo número real se puede relacionar de forma única con el *número entero inmediatamente inferior*, llamado su "*parte entera*" y representado $E(x)$. El hecho de que este número sea único hace que nos encontremos ante una función.

Por ejemplo, la parte entera de 8,3 es 8: $E(\mathbf{8'3})=\mathbf{8}$; la de -4,2 es -5: $E(\mathbf{-4'2})=\mathbf{-5}$ …

Pues bien, esta función, a pesar de su sencilla descripción mediante palabras que nos dicen qué debemos hacer, no se puede escribir mediante una fórmula algebraica.

Actividades propuestas

4. De las siguientes relaciones entre dos variables, razona cuáles son funcionales y cuáles no:
   a. Edad – altura de la persona a lo largo de su vida
   b. Altura – edad de la persona
   c. Precio de la gasolina – día del mes
   d. Día del mes – precio de la gasolina
   e. Un número y su quinta parte
   f. Un número y su cuadrado
   g. Un número y su raíz cuadrada
5. Si hoy el cambio € a $ está 1 € = 1,37 $, completa en tu cuaderno la siguiente tabla de equivalencia entre las dos monedas:

€	2	5	10	27	60
$					

6. Expresa mediante una fórmula la relación que existe entre ambas. ¿Se puede expresar de forma única dicha relación? ¿Es una función?
7. Sin realizas el cambio en una oficina, te cobran una pequeña comisión fija por realizar la operación de 1,5 €. ¿Cómo quedaría/n la fórmula/s en este caso?
8. El puente Golden Gate permite la comunicación entre los dos lados de la bahía de San Francisco. Sus torres, de 746 pies de altura, están separadas por una distancia de 4200 pies aproximadamente. La calzada, que tiene una anchura de 90 pies y se encuentra a una altura de 220 pies sobre el nivel del agua, está sujeta a las torres mediante dos cables, de 3 pies de diámetro, que tienen forma de parábola y que tocan la calzada en el centro del puente.

-Realiza un dibujo donde queden reflejados los datos más significativos del problema.

-Determina la relación que existe entre la altura a la que se encuentra un punto del cable y la distancia de su proyección vertical al centro del puente.

-Aplicar dicha fórmula para calcular la altura de un punto del cable cuya vertical está a 1000 pies del centro del puente.

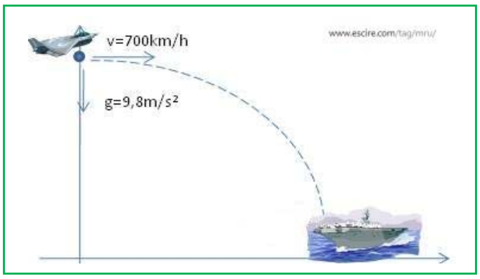
2.2. Gráfica de una función.

Ya que en toda función tenemos dos valores que se relacionan de forma única, podemos dibujarlos ambos en los ejes cartesianos de forma que, si unimos todos esos puntos, obtenemos una curva que nos permite visualizar dicha función.

Dicha representación tiene una serie de limitaciones, muchas de ellas comunes a cualquier dibujo que podamos hacer: es aproximada puesto que los instrumentos que se utilizan para hacerlo (regla, compás, lápiz…), por muy precisos que sean (ordenadores), siempre tienen un margen de error; también existen fallos de tipo visual o de los instrumentos de medida; o muchas veces tenemos que representar los infinitos puntos del grafo en un espacio finito, lo cual es imposible y hace que solo podamos dibujar una parte de lo que se pretende, pero no todo.

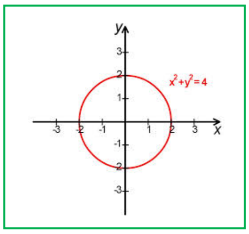
A pesar de todos estos inconvenientes, representar gráficamente esta serie de puntos relacionados que conforman la función, aunque sea de forma aproximada, es importante puesto que nos hace mucho más concreto un concepto muy abstracto, al poder visualizarlo: "más vale una imagen que mil palabras".

Ejemplo:



- *La trayectoria que debe seguir un avión para aterrizar en un portaviones se corresponde con la representación de la función que relaciona la distancia recorrida por el mismo dependiendo del tiempo que tarda en recorrerla:*

Además, una representación también nos permite descubrir si la misma representa a una función o no, ya que en el dibujo es fácil interpretar si a un valor de la variable independiente le corresponde únicamente uno de la dependiente o más de uno, propiedad fundamental que define a las funciones.



Ejemplo:

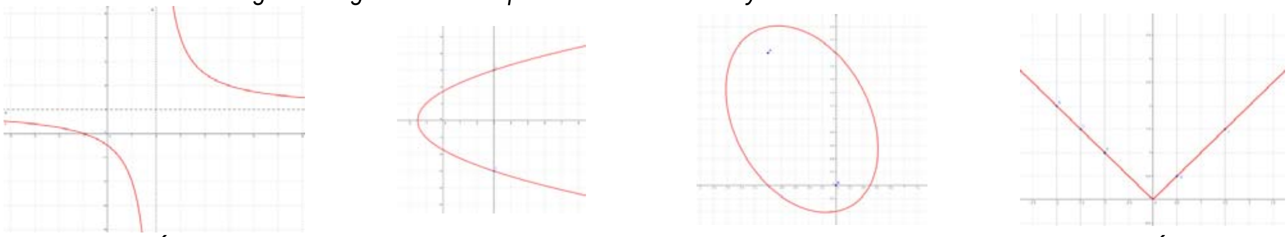
- *El siguiente dibujo, que corresponde a una circunferencia, al valor 0 de la variable independiente le corresponden los valores 2 y –2 de la dependiente. Además, hay otros muchos valores a los que les pasa lo mismo, por lo que* **no** *puede ser la representación de una función.*

La fórmula que corresponde a dicha gráfica es $x^2+y^2=4$ o, también, $y=\pm\sqrt{4-x^2}$.

La **gráfica de una función** es la representación en el plano cartesiano de todos los pares ordenados en los que el primer valor corresponde a uno cualquiera de la variable independiente y el segundo al que se obtiene al transformarlo mediante la función: $\{(x, y) \mid x \in \mathfrak{R}, y = f(x)\}$

Actividades resueltas

- *Indica cuáles de las siguientes gráficas corresponden a una función y cuáles no:*



SÍ *NO* *NO* *SÍ*

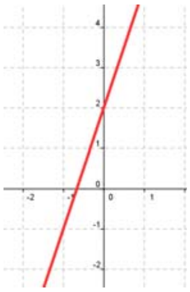
¿Cuál es la clave o regla para saber, a partir del dibujo, si este corresponde a una función o no?

Si trazamos rectas verticales imaginarias y estas chocan con el dibujo, como mucho, en un punto, la gráfica corresponde a una función. En otro caso, no.

- *Dibuja en el plano cartesiano los valores de la siguiente tabla y conjetura acerca de qué tipo de figura corresponde a la gráfica de la función:*

x	–4	–2	0	1	3
f(x)	–10	–4	2	5	11

GRÁFICA



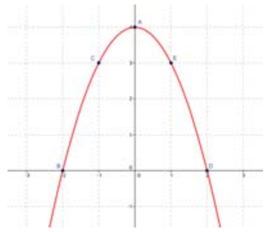
Observamos que los puntos, al representarlos, están alineados. Por tanto, el dibujo que corresponde a la gráfica de la función es una RECTA.

En este caso, no es demasiado difícil descubrir que la fórmula que relaciona ambas variables es:

$$f(x) = 3x + 2$$

- *Completa la siguiente tabla a partir de la fórmula de la función* $f(x) = -x^2 + 4$, *dibuja los puntos en los ejes cartesianos e intenta unirlos mediante una curva:*

GRÁFICA



x	–2	–1	0	1	2
f(*x*)	*0*	*3*	*4*	*3*	*0*

La curva obtenida recibe el nombre de PARÁBOLA (que es una de las cuatro cónicas).

Actividades propuestas

9. Realiza en tu cuaderno el dibujo de dos gráficas, una que corresponda a una función y la otra no. Identifica cada cual y explica el porqué de dicha correspondencia.
10. Realiza en tu cuaderno una tabla con 10 valores de la función *e*(*t*) = 5*t* + 20, represéntalos gráficamente e indica la figura que determinan. Si dicha función representa el espacio (en kilómetros) que recorre una persona que lleva andados 20 km y camina a una velocidad de 5 km/h, en función del tiempo que tarda en recorrerlo (en horas), indica cuáles serían los valores que no tendría sentido dar a la variable independiente y en qué se traduce eso en la gráfica.
11. Razona si los valores de la siguiente tabla pueden corresponder a los de una función y por qué:

x	–13	–7	10	–13	24
f(*x*)	–15	0	14	3	0

12. En una hoja de papel cuadriculado raya un cuadrado de lado un cuadradito. ¿Cuál es su área? Ahora haz lo mismo con un cuadrado de lado 2. Continúa tomando cuadrados de lados 3, 4, 5… y calcula sus áreas. Con los resultados completa una tabla de valores y dibuja su gráfica. ¿Tiene sentido para valores negativos de la variable? Busca una fórmula para esta función.
13. Para aparcar en zona azul (no residentes) hay unas tarifas. Representa una gráfica de la función cuya variable independiente sea el tiempo y la variable dependiente el precio (en euros) que hay que pagar.
14. Un fabricante quiere construir vasos cilíndricos medidores de volúmenes, que tengan de radio de la base 4 cm y de altura total del vaso 24 cm. Escribe una fórmula que indique cómo varía el volumen al ir variando la altura del líquido. Construye una tabla con los volúmenes correspondientes a las alturas tomadas de 3 en 3 cm. Escribe también una fórmula que permita obtener la altura conociendo los volúmenes. ¿A qué altura habrá que colocar la marca para tener un decilitro?

2.3. Ejemplos de funciones: función afín y cuadrática.

Durante todos los apartados anteriores hemos ido analizando distintos ejemplos de relaciones entre dos variables que eran función y otros que no. Lo hemos hecho desde el punto de vista gráfico, de tablas de valores y de fórmulas matemáticas.

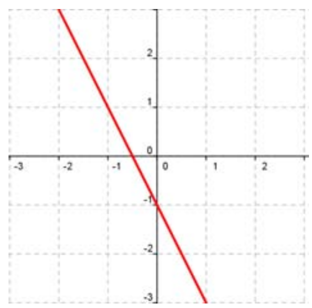
En esta sección, simplemente vamos a analizar unos cuantos ejemplos de funciones que son bastante sencillas y que tienen bastantes aplicaciones prácticas.

Una **función afín** es aquella función en la que la relación entre las dos variables viene dada por un polinomio de grado menor o igual a uno: *y* = *f*(*x*) = *mx* + *n*.

Su representación gráfica es siempre una **recta**, su **pendiente** es el coeficiente líder (*m*) e indica la inclinación de la misma (si es positivo la recta será **creciente** y si es negativo **decreciente**) y su **ordenada en el origen** (*n*) es el término independiente, que nos proporciona el punto donde la recta corta al eje de ordenadas.

Ejemplo:

GRÁFICA



- *y = –3x – 1 (polinomio de primer grado)*

x	–2	–1	–1/2	0	1
f(*x*)	3	1	0	–1	–3

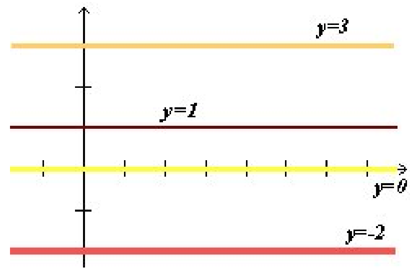
(–2, 3) (–1, 1) (–1/2, 0) (0, –1) (1, –3)

Pendiente: –3 $\Rightarrow$ recta decreciente

Ordenada en el origen: –1 $\Rightarrow$ (0, –1) punto de corte de la recta con el eje de ordenadas

Como casos particulares de funciones afines tenemos:

Función constante (recta horizontal): es aquella que siempre toma el mismo valor para todos los valores de la variable independiente (la pendiente es nula): $y = n$



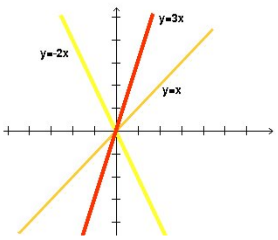
Ejemplo:

- Gráficas de $y = 3$; $y = 1$; $y = 0$; $y = –2$.

Por tanto, la recta no tiene inclinación, es decir, es paralela al eje de abscisas.

Observa que

La ecuación del eje de abscisas es $y = 0$.



Función lineal o **de proporcionalidad directa**: es aquella que tiene ordenada en el origen igual a 0 (pasa por el origen de coordenadas): $y = mx$

Cada valor de "*y*" conserva una misma proporción respecto al de "*x*":

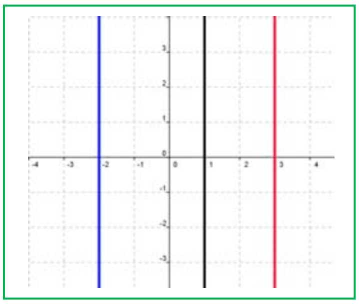
$y = \mathbf{3}x$ (*y* es el triple de *x*)

$y = -\mathbf{2}x$ (*y* es el opuesto del doble de *x*)

$y = x$ (**función identidad**: *y* es igual a *x*)

Observa que:

La gráfica de $x = a$ es una recta vertical, pero no es una función porque para el valor de la variable independiente "*a*", la ordenada toma infinitos valores.



Ejemplo:

- Dibuja la gráfica de $x = 3$; $x = –2$; $x = 1$.

La ecuación del eje de ordenadas es $x = 0$.

Actividades propuestas

15. Escribe tres funciones cuyas gráficas sean tres rectas de que pasen por el origen de coordenadas y sus pendientes sean 3, –2, y 1/2 respectivamente.
16. ¿Qué ángulo forma con el eje de abscisas la recta $y = x$? ¿Y la recta $y = –x$?
17. Un metro de cierta tela cuesta 1,35 €, ¿cuánto cuestan 5 metros? ¿Y 10 m? ¿Y 12,5 m? ¿Cuánto cuestan "*x*" metros de tela? Escribe la fórmula de esta situación.
18. Halla la ecuación y dibuja la gráfica de las rectas siguientes:
    a) Su pendiente es 2 y su ordenada en el origen es 3.
    b) Pasa por los puntos *A*(1, 3) y *B*(0, 4).
    c) Su ordenada en el origen es 0 y su pendiente es 0.
    d) Pasa por los puntos *C*(–1, 3) y *D*(–2, 5).
    e) Pasa por el punto (*a*, *b*) y tiene de pendiente *m*.

    ¿Cómo son entre sí dos rectas de igual pendiente y distinta ordenada en el origen?
19. Dibuja en tu cuaderno, sin hallar su ecuación, las rectas siguientes:
    a) De pendiente 3 y ordenada en el origen 0.
    b) Pasa por los puntos *A*(2, 3) y *B*(4, 1).
    c) Su pendiente es 2 y pasa por el punto (4, 5).

Una **función cuadrática** es aquella función en la que la relación entre las dos variables viene dada por un polinomio de grado dos: $y = f(x) = ax^2 + bx + c$.

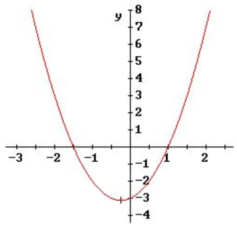
La gráfica de este tipo de funciones se llama **parábola**

Si el coeficiente líder o cuadrático es positivo (*a*>0), la parábola está abierta hacia el eje Y positivo (**convexa**).	Si el coeficiente líder o cuadrático es negativo (*a*<0), la parábola está abierta hacia el eje Y negativo (**cóncava**).

Autor: José Gallegos Fernández
Revisores: Concha Fidalgo y Javier Brihuega
Ilustraciones: José Gallegos Fernández

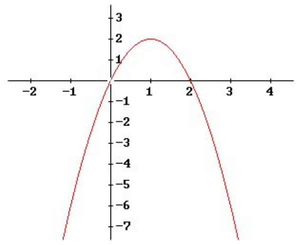
$y = 2x^2 + x - 3$

$2 > 0$



$y = -2x^2 + 4x$

$-2 < 0$



Los otros coeficientes del polinomio afectan a la posición que ocupa la parábola respecto a los ejes.

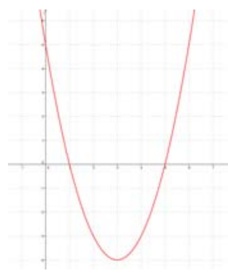
No podemos decir que una función cuadrática es creciente o decreciente, ya que hay un trozo (**rama**) que crece y otro que decrece. El punto donde se produce ese cambio se llama **vértice** y es el mayor (*máximo*) o menor (*mínimo*) valor que toma la función. Podemos decir que este punto es el más significativo en una parábola, y por eso es importante saber calcularlo. Para ello, le damos a la variable independiente el valor $x = \frac{-b}{2a}$, y lo sustituimos en la función para calcular "*y*". Dicho valor es fácil de recordar puesto que es lo mismo que aparece en la fórmula de las ecuaciones de 2º grado quitándole la raíz cuadrada, y se obtiene precisamente por el carácter de máximo o mínimo que tiene el vértice.

Ejemplo:

GRÁFICA

$$y = \underbrace{x^2 - 6x + 5}_{\text{polinomio 2º grado}}$$

x	3	1	5	0	6
f(x)	–4	0	0	5	5
	(3, –4)	(1, 0)	(5, 0)	(0, 5)	(6, 5)



Coeficiente líder: $1 > 0 \Rightarrow$ parábola convexa

Vértice: $x = \left[\frac{-b}{2a}\right]_{\substack{a=1\\b=-6}} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow (3,-4)$

Ordenada en el origen: $5 \Rightarrow (0,\ 5)$ *punto de corte con el eje de ordenadas.*

Puntos de intersección con el eje de abscisas: (1, 0) y (5, 0)

Actividades propuestas

20. Haz una tabla de valores y representa gráficamente en tu cuaderno: $\boxed{y = 3x + 3}$
21. Haz una tabla de valores y representa gráficamente en tu cuaderno: $\boxed{y = \frac{-x}{2}}$
22. Haz una tabla de valores y representa gráficamente en tu cuaderno: $\boxed{y = -3x^2 + 6x - 4}$
23. Haz una tabla de valores y representa gráficamente en tu cuaderno: $\boxed{y = 2x^2 - 8}$
24. Dibuja la gráfica de la función $y = x^2$.
    a) Para ello haz una tabla de valores, tomando valores de abscisa positiva.
    b) Tomando valores de abscisa negativa.
    c) ¿Qué le ocurre a la gráfica para valores grandes de "*x*"? ¿Y para valores negativos grandes en valor absoluto?
    d) ¿La curva es simétrica? Indica su eje de simetría.
    e) ¿Tiene un mínimo? ¿Cuál es? Coordenadas del vértice.
    f) Recorta una plantilla de esta parábola marcando su vértice y el eje de simetría, que usaremos en otros problemas.
25. Tomando la misma unidad que en el problema anterior dibuja en tu cuaderno, en un mismo sistema de referencia, las gráficas de las parábolas: $y = x^2 + 2$; $y = x^2 - 3$; $y = -x^2$; $y = -x^2 + 2$; $y = x^2 - 1$. Observa que puedes utilizar la plantilla del ejercicio anterior. Haz un resumen indicando lo que has obtenido. Habrás observado que en todos los casos puedes utilizar la plantilla trasladándola en sentido vertical, hacia arriba en el caso de $y = x^2 + 2$; y hacia abajo en el caso de $y = x^2 - 3$. La parábola $y = -x^2$; es simétrica (hacia abajo) de $y = x^2$. En general, si trasladamos *q* unidades en la dirección del eje de ordenadas tenemos la parábola $y = x^2 + q$.
26. Tomando la misma unidad que en el problema anterior dibuja en tu cuaderno, en un mismo sistema de referencia, las

gráficas de las parábolas: $y = (x + 2)^2$; $y = (x – 3)^2$; $y = (x + 1)^2$; $y = (x – 1)^2$. Observa que puedes utilizar la plantilla del ejercicio anterior. Haz un resumen indicando lo que has obtenido. Habrás observado que en todos los casos puedes utilizar la plantilla trasladándola en sentido horizontal, hacia la derecha en el caso de $y = (x – 3)^2$; y hacia la izquierda en el caso de $y = (x + 2)^2$. Por lo que, en general, si trasladamos p unidades en la dirección del eje de abscisas obtenemos la parábola $y = (x – p)^2$.

27. Escribe la ecuación de una parábola de igual forma que $y = x^2$, pero trasladada 5 unidades en sentido horizontal a la derecha y 3 unidades en sentido vertical hacia arriba. ¿Qué coordenadas tiene su vértice?
28. Dibuja en tu cuaderno, en un mismo sistema de referencia, las gráficas de las parábolas:

$$y = x^2;\ \ y = 2x^2;\ \ y = 1/3x^2;\ \ y = –x^2;\ \ y = –1/2x^2;\ \ y = –3x^2.$$

Observa que ahora ya no te sirve la plantilla empleada. Ahora las parábolas se estrechan o se ensanchan.

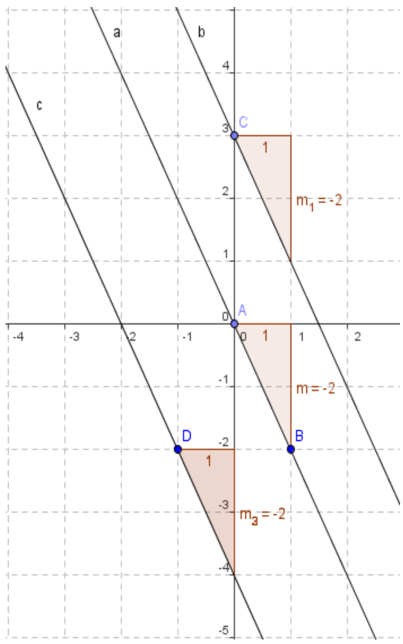
29. Completa este resumen. La gráfica de $y = ax^2$ se obtiene de la de $y = x^2$:
    a) Si $a > 1$ entonces ¿¿??
    b) Si $0 < a < 1$ entonces ¿¿??
    c) Si $a < –1$ entonces ¿¿??
    d) Si $–1 < a < 0$ entonces ¿¿??
30. Volvemos a usar la plantilla.
    a) Traslada el vértice de la parábola $y = x^2$ al punto (4, 2). Escribe su ecuación y la ecuación de su eje de simetría. Dibuja su gráfica.
    b) Traslada el vértice de la parábola $y = x^2$ al punto (–3, –1). Escribe su ecuación y la ecuación de su eje de simetría. Dibuja su gráfica.

2.4. Gráficas de funciones con Geogebra. Gráficas de funciones lineales y afines

En esta actividad se va a utilizar el programa *Geogebra* para representar funciones lineales y afines, las gráficas de estas funciones son rectas. Primero se representan rectas con la misma pendiente para observar la relación que existe entre ellas y determinar la propiedad que las caracteriza. También se representan rectas que tienen misma ordenada en el origen para observar la relación que existe entre ellas y determinar una característica común.

Actividades resueltas

Utiliza Geogebra para estudiar rectas con igual pendiente.



- Abre el programa Geogebra y en **Visualiza** activa **Cuadrícula** para que sea más fácil definir puntos.
- Con la herramienta **Nuevo Punto** define un punto en el origen de coordenadas. Observa que en la **Ventana Algebraica** aparece el punto, que el sistema denomina A, como objeto libre y coordenadas (0, 0).
- Define un **Nuevo Punto** de coordenadas (1, –2), el programa lo llama B y en la **Ventana Algebraica** aparece como objeto libre con sus coordenadas: B = (1, –2).
- Utiliza la herramienta **Recta que pasa por 2 puntos** para dibujar la recta que pasa por los puntos A y B. Observa que el programa la denomina a y en la **Ventana Algebraica** aparece como objeto dependiente y su ecuación a: $2x + y = 0$. Esta ecuación se puede expresar por: $y = –2x$.
- Define un **Nuevo Punto** de coordenadas (0, 3), el programa lo llama C y en la **Ventana Algebraica** aparece como objeto libre con sus coordenadas: $C = (0, 3)$.
- Con la herramienta **Recta Paralela**, dibuja una recta paralela a la recta a que pase por C. Observa que el programa la denomina b y en la **Ventana Algebraica** aparece como objeto dependiente y su ecuación a: $2x + y = 3$. Esta ecuación se puede expresar por: $y = –2x + 3$.
- Define un **Nuevo Punto** de coordenadas (–1, –2), el programa lo llama D y en la **Ventana Algebraica** aparece como objeto libre con sus coordenadas: $D = (–1, –2)$.
- Con la herramienta **Recta Paralela**, dibuja una recta paralela a la recta a que pase por D. Observa que el programa la denomina c y en la **Ventana Algebraica** aparece como objeto dependiente y su ecuación a: $2x + y = –4$. Esta ecuación se puede expresar por: $y = –2x – 4$.
- Utiliza la herramienta **Pendiente** para calcular las pendientes de las rectas a, b y c. Observa que al calcular la pendiente de la recta a aparece en la gráfica y en la **Ventana Algebraica** como objeto dependiente $m = –2$. Análogamente al calcular la pendiente de la recta b, se obtiene $m_1 = –2$ y al calcular la pendiente de la recta c, se tiene $m_2 = –2$.

31. ¿Cómo son las pendientes de las rectas paralelas? En función de los resultados anteriores realiza una conjetura y dibuja

otras rectas paralelas a la recta *a* para comprobarla.

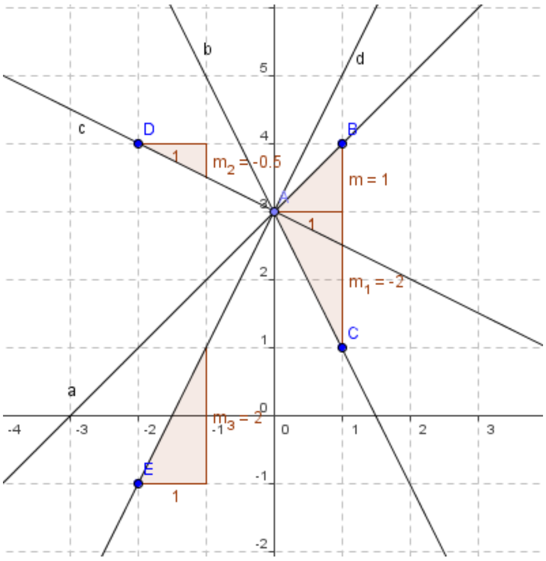
Observa que la ecuación de todas las rectas paralelas a la recta *a* son de la forma:

$$y = -2x + n, \text{ con } n \text{ variable.}$$

¿Alguna de las rectas que has dibujado es la gráfica de una función lineal?

Rectas con la misma ordenada en el origen

- *Utiliza Geogebra para estudiar rectas con igual ordenada en el origen.*



- Abre una **Nueva Ventana** que es una opción del menú **Archivo**.
- Con la herramienta **Nuevo Punto** define un punto de coordenadas (0, 3). Observa que en la **Ventana Algebraica** aparece el punto, que el sistema denomina *A*, como objeto libre y aparecen sus coordenadas *A* = (0, 3).
- Define un **Nuevo Punto** *B* de coordenadas (1, 4) y con la herramienta **Recta que pasa por 2 puntos** dibuja la recta que pasa por *A* y *B*, el programa la denomina *a* y en la **Ventana Algebraica** aparece su ecuación, *a*: -x + y = 3 equivalente a $y = x + 3$.
- Define un **Nuevo Punto** *C* de coordenadas (1, 1) y con la herramienta **Recta que pasa por 2 puntos** dibuja la recta que pasa por *A* y *C*, el programa la denomina *b* y en la ventana algebraica aparece su ecuación, *b*: 2x + y = 3 equivalente a $y = -2x + 3$
- Con un proceso similar dibuja la recta *c* que pasa por *A* y *D*, con *D* = (–2, 4) que tiene por ecuación *c*: $x + 2y = 6$. Esta ecuación se puede expresar por: $y = -\frac{1}{2}x + 3$.
- Dibuja también la recta *d* que pasa por *A* y *E*, con *E* = (–2, –1), la ecuación de la recta *d* que aparece es:

  d: $-4x + 2y = 6$, equivalente a $y = 2x + 3$.
- Utiliza la herramienta **Pendiente** para calcular las pendientes de las cuatro rectas que has dibujado.
  - Observa que las cuatro rectas que has dibujado pasan por el punto *A* = (0, 3), sus ecuaciones con la variable *y* despejada son: *a*: $y = x + 3$ *b*: $y = -2x + 3$ *c*: $y = -\frac{1}{2}x + 3$ *d*: $y = 2x + 3$.

32. ¿Qué tienen en común las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto *A* (0, 3)? En función de los resultados anteriores realiza una conjetura y compruébala dibujando otras rectas que pasen por el punto *A*.

Observa que la ecuación de todas las rectas que pasan por el punto *A*(0, 3) son de la forma:

$$y = mx + 3, \text{ siendo } m \text{ la pendiente de la recta.}$$

En la ecuación de la recta $y = mx + n$, el parámetro *n* se denomina ordenada en el origen

33. ¿Cuál es el valor de la ordenada en el origen de las cuatro rectas que has dibujado?

34. Observa las ecuaciones de las cuatro rectas que has dibujado, dos de ellas tienen pendiente positiva *a* y *d* y las otras dos, *b* y *c* tienen pendiente negativa. Relaciona el signo de la pendiente de la recta con el crecimiento o decrecimiento de la función que representan.

Actividades propuestas

35. Calcula dos puntos de las rectas de ecuaciones: $y = 2x + 2$ e $y = -\frac{x}{2} + 2$, para dibujarlas con Geogebra. Indica dos propiedades comunes de ambas gráficas.

36. Representa, también, las rectas de ecuaciones: $y = -3x + 1$ e $y = \frac{x}{3} - 3$.

37. ¿Qué condición deben verificar las pendientes de dos rectas para que sean perpendiculares?

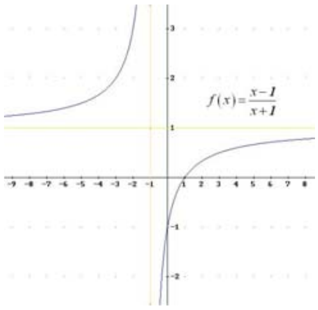
3. CARACTERÍSTICAS DE UNA FUNCIÓN

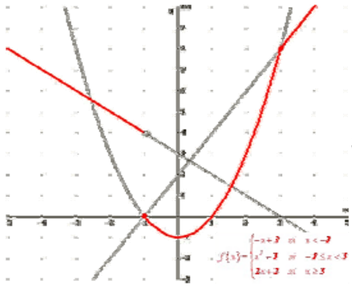
3.1. Continuidad.

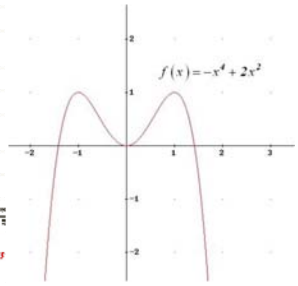
El concepto de continuidad de una función es muy intuitivo (en la mayoría de las funciones) ya que se corresponde con que la gráfica se pueda dibujar sin levantar el lápiz del papel. Cuando esto no ocurre, se producen “saltos” en determinados puntos que reciben el nombre de discontinuidades.

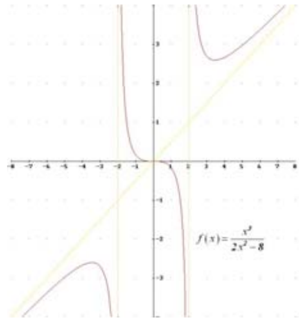
Ejemplos:

- *¿Qué funciones son continuas según su dibujo y cuáles no? Indica en estas últimas el/los valor/es de la variable independiente donde se produce la discontinuidad:*









NO (en x = –1 tiene un salto infinito)

NO (en x = –1 tiene un salto finito de 4 unidades)

SÍ (continua para cualquier valor de x)

NO (en x = –2 y x = 2 tiene saltos infinitos)

3.2. Monotonía: crecimiento y decrecimiento.

Una función es **creciente** en un intervalo cuando al aumentar el valor de la variable independiente aumenta también el de la dependiente.

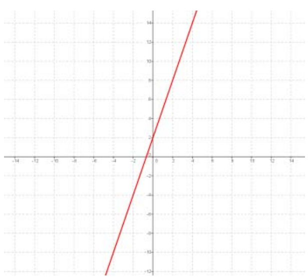
Una función es **decreciente** en un intervalo si al aumentar el valor de la variable independiente disminuye el de la dependiente.

Una función es **monótona** en un intervalo cuando es creciente o decreciente en dicho intervalo.

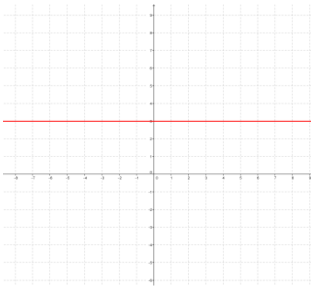
Una función es **constante** en un intervalo cuando tome el valor que tome la variable independiente, la dependiente toma siempre el mismo valor.

Como indican las definiciones, la monotonía o no de una función se da en un intervalo. Por tanto, una función puede ser creciente para una serie de valores, para otros ser decreciente o constante, luego puede volver a ser creciente o decreciente o constante…

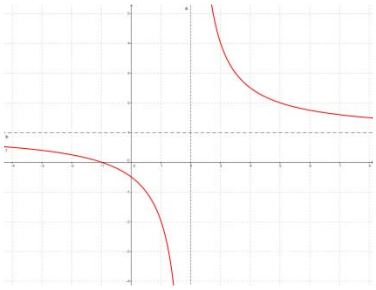
Ejemplo:



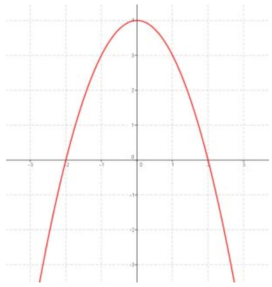
CRECIENTE siempre



CONSTANTE siempre



DECRECIENTE hasta x = 2
DECRECIENTE desde x = 2



CRECIENTE hasta x = 0
DECRECIENTE desde x = 0

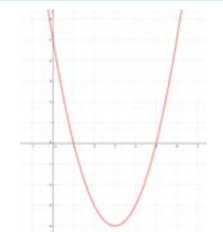
3.3. Extremos: máximos y mínimos.

Una función presenta un **máximo relativo** (o máximo global) en un punto cuando el valor de la función en dicho punto es mayor que cualquiera de los valores que están a su alrededor (en su *entorno*). Si, además, el valor es mayor que en cualquier otro punto de la función, se dice que la función alcanza un **máximo absoluto** (o mínimo global) en él.

Una función presenta un **mínimo relativo** (o mínimo local) en un punto cuando el valor de la función en dicho punto es menor que en cualquiera de los valores que están a su alrededor (en su *entorno*). Si, además, el valor es menor que en cualquier otro punto de la función, se dice que la función alcanza un **mínimo absoluto** (o global) en él.

Si una función presenta un máximo o un mínimo en un punto, se dice que tiene un **extremo** en dicho punto, que podrá ser relativo o absoluto.

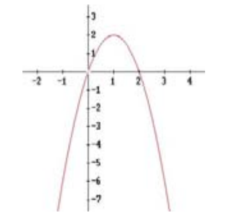
Ejemplos



$y = x^2 – 6x + 5$

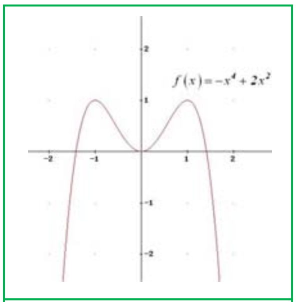
- *La parábola $y = x^2 – 6x + 5$ tiene un mínimo absoluto en su vértice (3, –4). No tiene máximos, ni relativos ni absoluto. Antes del vértice es decreciente y después es creciente.*
- *La parábola $y = –2x^2 – 4x$ tiene un máximo absoluto en su vértice (1, 2). No tiene mínimos, ni relativos ni absoluto. Antes del vértice, para $x < 1$, la función es creciente, y después, para $x > 1$, la función es decreciente.*

Todas las parábolas tienen un máximo o un mínimo absoluto en su vértice.



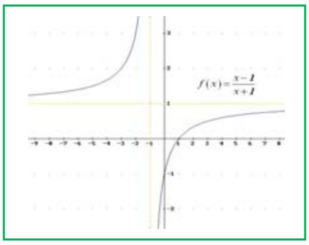
$y = –2x^2 – 4x$

- *La función $y = –x^4 + 2x^2$ tiene un mínimo absoluto en el origen (0, 0) y dos máximos en (1, 1) y en (–1, 1). Para $x < –1$ es*

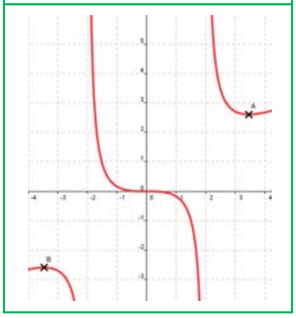


una función creciente, para –1 < x < 0, es una función decreciente, para 0 < x < 1 es creciente, y para x > 1 es decreciente.

Observa, en los **máximos** siempre la función pasa de ser **creciente** a ser **decreciente**, y el los **mínimos** de ser **decreciente** a ser **creciente**.



- La función $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ no tiene ni máximos ni mínimos (ni relativos ni absolutos). Es una función siempre creciente.



- La gráfica de la función $f(x) = \frac{x^3}{2x^2-8}$ no tiene máximo ni mínimo absoluto, pero tiene un mínimo relativo hacia *x* = 3, *A*(3'46, 2'6), y un máximo relativo hacia *x* = –3, *B*(–3'46, –2'6).

Observa que el valor del mínimo relativo, 2'6, es mayor que la del máximo relativo, –2'6. Pero en valores próximos al mínimo si es el menor valor, por este motivo se denominan "*relativo*", "*local*". No son los valores mayores o menores que alcanza la función, pero si únicamente miramos en un entorno del punto si son valores máximos o mínimos.

-

3.4. Simetría.

Una **función par** es aquella en la que se obtiene lo mismo al sustituir un número que su opuesto:

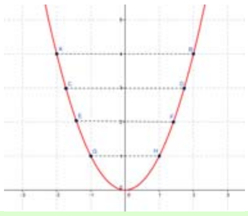
$$f(-x) = f(x)$$

Esta propiedad se traduce en que la función es **simétrica** respecto al **eje de ordenadas**, es decir, si doblamos el papel por dicho eje, la gráfica de la función coincide en ambos lados.

Ejemplo:

- *La función cuadrática* $f(x) = x^2$ *es par:*

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

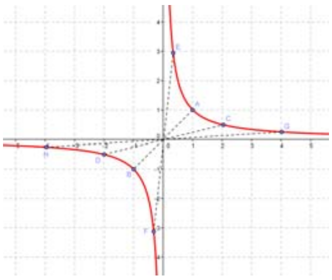


Una **función impar** es aquella en la que se obtiene lo opuesto al sustituir un número que su opuesto:

$$f(-x) = -f(x)$$

Esta propiedad se traduce en que la función es **simétrica** respecto al **origen** de coordenadas, es decir, si trazamos un segmento que parte de cualquier punto de la gráfica y pasa por el origen de coordenadas, al prolongarlo hacia el otro lado encontraremos otro punto de la gráfica a la misma distancia.

Ejemplo:



La función de proporcionalidad inversa $f(x) = \frac{1}{x}$ es impar porque:

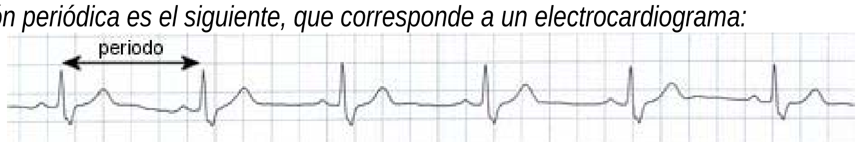
$$f(-x) = \frac{1}{(-x)} = \frac{-1}{x} = -f(x)$$

3.5. Periodicidad.

Una **función periódica** es aquella en la que las imágenes de la función se repiten siempre que se le añade a la variable independiente una cantidad fija, llamada *periodo.*

Ejemplo:

- *Un ejemplo de función periódica es el siguiente, que corresponde a un electrocardiograma:*



Se observa claramente que la gráfica se repite a intervalos iguales, ya que los latidos del corazón son rítmicos.

Actividades resueltas

- *¿Qué significaría, en la gráfica anterior, que los intervalos de repetición no fueran iguales?*

Si no tenemos un periodo fijo, querría decir que el corazón no está funcionando de forma rítmica y, por tanto, diríamos que se ha producido una “arritmia”.

- *¿Cómo influiría en la gráfica anterior el que el periodo sea más o menos grande? ¿Qué significado tendría?*

Si el periodo es más grande, es decir, los intervalos de repetición se encuentran más distanciados, tendríamos un ritmo de latido más lento (menos pulsaciones por minuto), lo que se conoce como “bradicardia”.

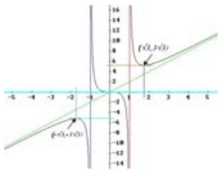
Si el periodo es menor, pasaría justo todo lo contrario, esto es, el corazón estaría latiendo más rápido de lo normal (más pulsaciones por minuto) y tendríamos una “taquicardia”.

Actividades propuestas

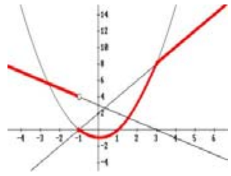
38. Señala todas las características que puedas de las funciones representadas mediante sus gráficas: dominio y rango, simetría, puntos de intersección con los ejes coordenados, continuidad, crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos.

GRÁFICA 1

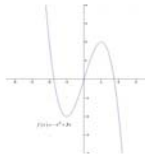
GRÁFICA 2



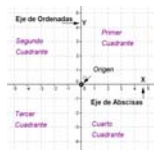
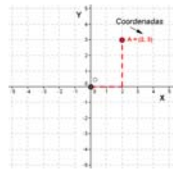
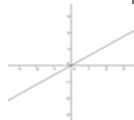
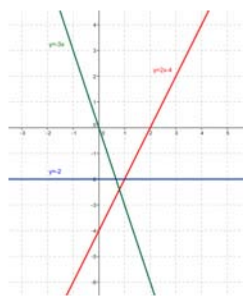
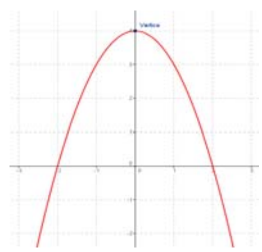
GRÁFICA 3

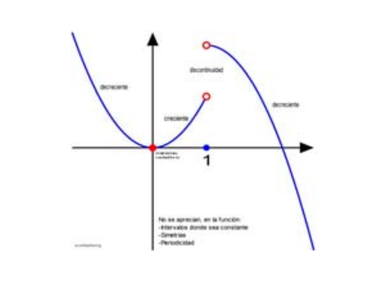


GRÁFICA 4



RESUMEN

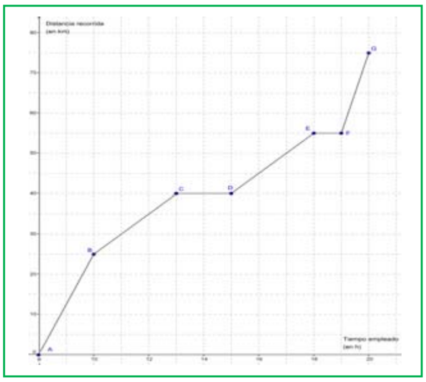
Ejes cartesianos y coordenadas de un punto en el plano		
Función	Una **función** es una relación entre dos magnitudes de forma que a un valor cualquiera de una (**variable independiente**) le hacemos corresponder, como mucho, un único valor de la otra (**variable dependiente**).	$y = f(x) = \mathbf{0{,}59} \cdot x$ $f(\mathbf{2}) = \mathbf{0{,}59} \cdot \mathbf{2} = \mathbf{1{,}18}$ $f(\mathbf{5}) = \mathbf{0{,}59} \cdot \mathbf{5} = \mathbf{2{,}95}$
Gráfica de una función	La **gráfica de una función** es la representación en el plano cartesiano de todos los pares ordenados en los que el primer valor corresponde a uno cualquiera de la variable independiente y el segundo al que se obtiene al transformarlo mediante la función: $\{(x, y) \mid x \in \Re, y = f(x)\}$	$y = f(x) = 0{,}59x$ *Gráfica:* 
Función afín, función lineal y función constante	Una **función afín** es aquella función en la que la relación entre las dos variables viene dada por un polinomio de grado menor o igual a uno: $y = f(x) = mx + n$. La representación gráfica es una recta. “*m*” recibe el nombre de **pendiente** y “*n*” **ordenada en el origen.** Una **función lineal** o **de proporcionalidad directa** es una función afín con ordenada en el origen nula: $y = mx$ (pasa por el origen). Una **función constante** es una función afín con pendiente nula: $y = n$ (siempre toma el mismo valor y su gráfica es una recta horizontal).	
Función cuadrática	Una función cuadrática es aquella función en la que la relación entre las dos variables viene dada por un polinomio de grado dos: $y = f(x) = ax^2 + bx + c$. La gráfica de este tipo de funciones se llama parábola. El punto más significativo de la parábola es el **vértice** y se calcula dándole a la variable independiente el valor $x = -b/2a$ Si el coeficiente líder es positivo, el vértice es un mínimo y, si es negativo, un máximo.	

Continuidad Monotonía Extremos Simetría Periodicidad	Una función puede ser continua en un intervalo si su gráfica no sufre “rupturas” (llamadas **discontinuidades**), **creciente** (**decreciente**) si su valor aumenta (disminuye) cuando lo hace la variable independiente, **constante** cuando siempre toma el mismo valor, **par** si la imagen de la variable independiente coincide con el de su opuesto, **impar** cuando el valor de la función para el opuesto de la variable independiente también es el opuesto y **periódica** si las imágenes de los valores obtenidos al sumar una cantidad fija (**periodo**) a la variable independiente coinciden.	

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Sistemas de representación

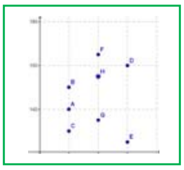
2. Sitúa en un sistema de referencia cartesiano los puntos siguientes, eligiendo una escala en los ejes que permita dibujarlos todos de forma cómoda: *A*(5,4); *B*(0,2); *C*(–2,0); *D*(3,–1,3); *E*(1’5,0); *F*(0,0); *G*(–1,–2/3). Señala en cada caso a qué cuadrante pertenece el punto o, en su caso, en qué eje está.
3. Escribe las coordenadas de tres puntos situados en el tercer cuadrante.
4. Sitúa en un sistema de referencia cartesiano los puntos siguientes:
   1. *A*(0, 4); *B*(0, 2’3); *C*(0, –2); *D*(0, –1). ¿Qué tienen en común todos ellos?
5. Escribe las coordenadas y representa tres puntos del eje de ordenadas. ¿Qué tienen en común?
6. Dibuja en tu cuaderno un triángulo rectángulo con un cateto igual a 3, y el vértice del ángulo recto en el origen de coordenadas. Indica las coordenadas de todos los vértices.
7. La siguiente gráfica resume la excursión que hemos realizado por la sierra de Guadarrama:



   a) ¿Cuánto tiempo duró la excursión?
   b) ¿Cuánto tiempo se descansó? ¿A qué horas?
   c) ¿Cuántos kilómetros se recorrieron?
   d) ¿En qué intervalos de tiempo se fue más rápido que entre las 11 y las 13 horas?
   e) Haz una breve descripción del desarrollo de la excursión.
   f) Construye una tabla de valores a partir de los puntos señalados en la gráfica.
   g) Si en el eje de ordenadas representáramos la variable “distancia al punto de partida”, ¿sería la misma gráfica? Con los datos que dispones, ¿puedes hacerla?

Funciones y tipos de funciones.

8. Indica cuáles de las siguientes correspondencias son funciones:
   a) A cada número natural se le asocian sus divisores primos.
   b) A cada circunferencia del plano se le asocia su centro.
9. La altura y la edad de los componentes de un equipo de baloncesto están relacionados según muestra la siguiente gráfica:



   a) Si Juan tiene 14 años, ¿cuál puede ser su altura?
   b) Si María mide 165 cm, ¿cuál puede ser su edad?
   c) La relación entre la altura y la edad de los diferentes componentes del equipo, ¿es una relación funcional? ¿Por qué?
   d) ¿Y la relación entre la edad y la altura? Realiza una gráfica similar a la anterior para representar esta situación.
10. La distancia, *d*, recorrida por un tren depende del número de vueltas, *n*, que da cada rueda de la locomotora.

a) Escribe la fórmula que permite obtener *d* conocido *n*, sabiendo que el diámetro de las ruedas de la locomotora es de 78 cm.
b) Dibuja la gráfica.
c) ¿Qué distancia habrá recorrido el tren cuando la rueda haya dado mil vueltas? (toma como valor de π el número 3,14).
d) ¿Cuántas vueltas habrá dado la rueda al cabo de 7 km?

11. Un globo sonda utilizado por el Servicio Meteorológico de los Pirineos para medir la temperatura a distintas alturas lleva incorporado un termómetro. Se observa que cada 180 m de altura la temperatura disminuye un grado. Cierto día la temperatura en la superficie es de 9º C. Determina:
   a) ¿Qué temperatura habrá a 3 km de altura?
   b) ¿A qué altura habrá una temperatura de –30º C?
   c) Escribe una fórmula que permita calcular la temperatura T conociendo la altura A. Confecciona una tabla y dibuja

la gráfica. ¿Qué tipo de función es?

d) Si la temperatura en la superficie es de 12º C, ¿cuál es entonces la fórmula? ¿Qué tipo de función es?

12. Dibuja la gráfica de la función parte entera: $y = E(x)$.
13. Un rectángulo tiene un perímetro de 100 cm. Llama x a la longitud de uno de sus lados y escribe la fórmula que da el área en función de x. Dibuja su gráfica. ¿Qué tipo de función es?
14. Una caja cuadrada tiene una altura de 20 cm. ¿Cómo depende su volumen del lado de la base? Dibuja la gráfica de la función que resulta.
15. Con una hoja de papel de 32 cm de largo y 22 cm de ancho se recorta un cuadrado de 2 cm de lado en cada una de las esquinas, se dobla y se construye una caja. ¿Cuál es el volumen de la caja? ¿Y si se recortan cuadrados de 3 cm? ¿Cuál es el volumen si el lado del cuadrado recortado es x? Escribe la fórmula y dibuja la gráfica.
16. Escribe la ecuación de la recta paralela a $y = 4x + 2$ de ordenada en el origen 6.
17. Sin representarlos gráficamente, di si están alineados los puntos $A(3, 4)$, $B(7, 9)$ y $C(13, 15)$.
18. Una empresa de alquiler de vehículos ofrece dos fórmulas diferentes. Fórmula 1: Lo alquila por 300 euros al día con kilometraje ilimitado. Fórmula 2: Lo alquila por 200 euros al día y 7 euros el kilómetro. Queremos hacer un viaje de 10 días y mil kilómetros, ¿cuánto nos costará con cada una de las fórmulas? Como no sabemos el kilometraje exacto que acabaremos haciendo, nos interesa hacer un estudio para saber la fórmula más beneficiosa. Escribe las fórmulas de ambas situaciones y dibujas sus gráficas. Razona, a partir de dichas gráficas, qué fórmula es más rentable según el número de kilómetros que vayamos a hacer.
19. Se construyen boyas uniendo dos conos iguales por la base, siendo el diámetro de la base de 90 cm. El volumen de la boya es función de la altura "*a*" de los conos. Si queremos una boya para señalar la entrada de patinetes nos basta con una altura de 50 cm: ¿qué volumen tendrá? Si es para barcos mayores se necesita una altura de 1,5 m: ¿qué volumen tendrá? Escribe la expresión de la función que calcula el volumen en función de la altura. Dibuja su gráfica.
20. Calcula el vértice, el eje de simetría y los puntos de intersección con los ejes de las siguientes parábolas. Dibuja sus gráficas.

    a) $y = x^2 + 8x - 13$ b) $y = -x^2 + 8x - 13$ c) $y = x^2 - 4x + 2$ d) $y = x^2 + 6x$ e) $y = -x^2 + 4x - 7$
21. Dibuja la gráfica de $y = 2x^2$. Haz una plantilla. Determina el vértice de las siguientes parábolas y utiliza la plantilla para dibujar su gráfica:

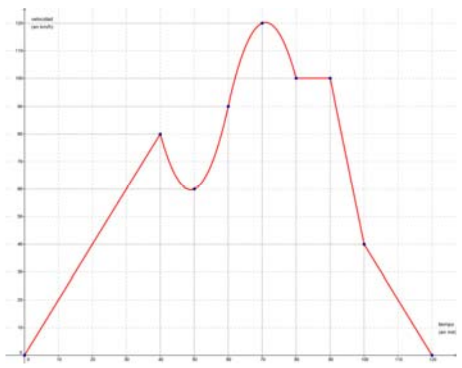
    a) $y = 2x^2 + 8x - 12$ b) $y = -2x^2 + 8x - 10$ c) $y = 2x^2 - 4x + 2$ d) $y = 2x^2 + 6x$

    Ayuda: $2x^2 + 8x - 12 = 2(x^2 + 4x - 6) = 2((x + 2)^2 - 4 - 6) = 2((x + 2)^2 - 10)$. Vértice $(-2, -10)$
22. El consumo de gasolina de un coche por cada 100 km viene representado mediante la gráfica.

a) ¿Cuál es la variable dependiente?
b) ¿Y la independiente?
c) ¿Cuál es el consumo para una velocidad de 50 km/h?
d) ¿A qué velocidad el consumo es de 5 l/100 km?
e) Utiliza la gráfica para explicar cómo varia el consumo de gasolina dependiendo de la velocidad del coche.

Características de las funciones.

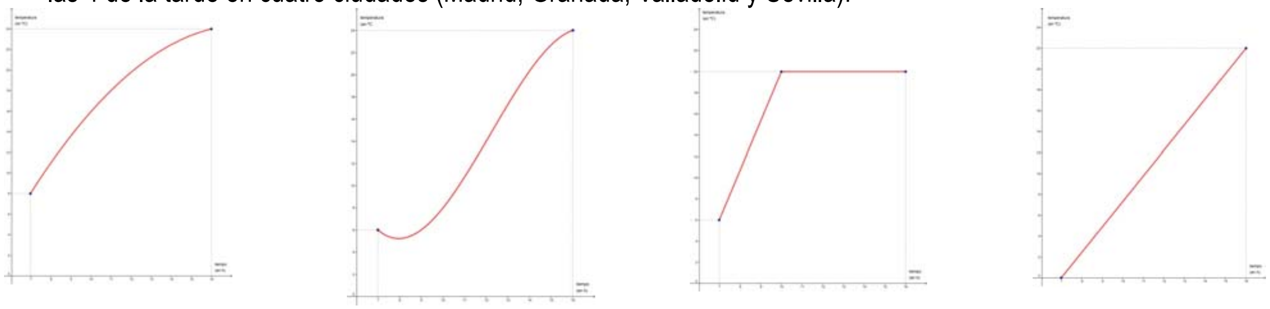
23. Joaquín ha llegado a un acuerdo con su padre para recibir su paga. Cobrará 20 euros al mes el primer año, y 5 euros más por cada año que pase. ¿Cuánto le corresponderá dentro de 7 años? Haz una tabla de valores y representa su gráfica. ¿Es continua? Indica los puntos de discontinuidad y su tipo. Busca una fórmula que permita calcular la paga cuando hayan pasado n años.
24. Durante un viaje, la velocidad del coche varía dependiendo del tipo de carretera, de las condiciones en que se encuentra, del tiempo meteorológico… La siguiente gráfica refleja la velocidad de un vehículo en cada instante del trayecto que ha seguido.



a) ¿Es funcional la relación de dependencia entre el tiempo y la velocidad?
b) ¿Cuál es la variable independiente? ¿Y la dependiente?
c) ¿A qué velocidad iba cuando llevaba una hora de viaje? ¿En qué momentos iba a una velocidad de 40 km/h?
d) Indica los intervalos en los que la velocidad ha aumentado y disminuido. ¿Ha sido constante en algún momento? ¿Cuándo? ¿Durante cuánto tiempo?
e) ¿Cuál ha sido la velocidad máxima alcanzada a lo largo de todo el viaje? ¿En qué momento se alcanzó? ¿Y durante la primera hora del mismo?
f) ¿Cuál ha sido la velocidad mínima alcanzada a lo largo de todo el viaje? ¿Cuándo se alcanzó? ¿Y entre la primera media hora y la hora y media?

25. Al entrar en el aparcamiento de un centro comercial encontramos un letrero con los precios que nos indican que 1 hora o fracción cuesta 1’20 € y las dos primeras horas son gratis para los clientes con tarjeta de compra del centro. Haz una tabla que relacione el tiempo con el importe pagado durante una jornada completa (12 horas) en los casos de un cliente con tarjeta o sin ella. Esboza la gráfica y contesta a las preguntas:
    a) ¿Qué valores toma la variable dependiente? ¿Y la independiente?
    b) ¿Puedes unir los puntos de la gráfica? ¿Cómo se debe hacer?
    c) ¿Existen puntos de discontinuidad? Si la respuesta es afirmativa, señálalos y explica su significado.
26. Al estudiar el crecimiento de una planta observamos que durante los primeros 30 días lo hace muy de prisa, en los 15 días siguientes el crecimiento es más lento y después se mantiene con la misma altura. Realiza un esbozo de la gráfica que relaciona el tiempo con la altura alcanzada por la planta.
    Si tenemos más información podemos mejorar el boceto. Por ejemplo, haz la tabla y la gráfica en el caso de que el crecimiento de la planta se ajuste a las siguientes fórmulas (el tiempo se expresa en días y la altura en centímetros):
    a) Durante los primeros 30 días: altura = 4 x tiempo
    b) En los 15 días siguientes: altura = 90 + tiempo
    c) A partir del día 45: altura = 135.
27. Un viaje realizado por un tren, en un cierto intervalo del mismo, viene dado de la siguiente forma:
    -Durante las dos primeras horas, la distancia “*d*” (en kilómetros) al punto de partida es $2\cdot t + 1$, donde “*t*” es el tiempo (en horas) de duración del trayecto.
    -Entre la 2ª y 3ª hora, dicha distancia viene dada por $-t + 7$.
    -Entre la 3ª y 4ª hora, ambas inclusive, $d = 4$.
    -Desde la 4ª y hasta la 6ª (inclusive), la distancia se ajusta a $3\cdot t - 8$.

    a) Realiza una tabla y una gráfica que recoja dicho viaje de la forma más precisa posible (para ello debes calcular, como mínimo, los valores de la variable tiempo en los instantes 0, 2, 3, 4 y 6).
    b) Explica si la relación anteriormente explicada entre la distancia recorrida y el tiempo tardado en recorrerla es funcional.
    c) La relación anterior, ¿presenta alguna discontinuidad?
    d) ¿En qué momento la distancia al punto de partida es de 7 km?
    e) ¿Qué indican los puntos de corte de la gráfica con los ejes?
    f) Determina los intervalos donde la función es creciente, decreciente y constante.
    g) Encuentra los puntos donde la función alcanza sus máximos y mínimos relativos y absolutos. Interpreta el significado que puedan tener.
28. Representa gráficamente las siguientes funciones, estudiando en ella todas las características que se han trabajado en el tema: monotonía, extremos, simetría y periodicidad.
    a) Valor absoluto de un número: $f(x) = |x|$.
    b) Opuesto e inverso de un número: $f(x) = \dfrac{-1}{x}$.
    c) *Mantisa* (a cada número le hace corresponder la diferencia entre dicho número y su parte entera): $M(x) = x - E(x)$.
29. Las gráficas siguientes muestran la evolución, un día cualquiera, de la temperatura alcanzada entre las 7 de la mañana y las 4 de la tarde en cuatro ciudades (Madrid, Granada, Valladolid y Sevilla):

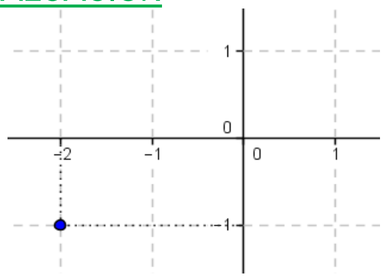


    a) Estudia la monotonía de todas las gráficas.
    b) ¿En alguna ciudad la temperatura se ha mantenido constante durante todo el intervalo? ¿Y en parte de él?
    c) ¿Qué ciudad crees que presenta un cambio de temperatura más suave a lo largo de toda la mañana?
    d) Teniendo en cuenta que en Madrid el incremento de la temperatura ha sido siempre lineal, en Granada la temperatura mínima se ha alcanzado después de las 7 h y en Valladolid a partir del medio día la temperatura bajó,

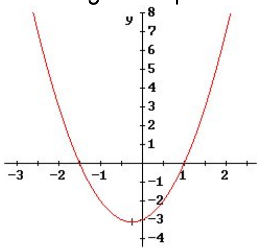
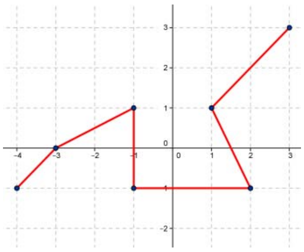
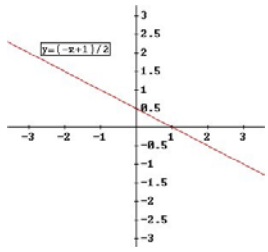
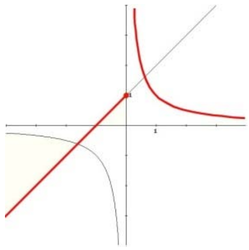
indica qué gráfica corresponde a cada una de las ciudades y explica cuáles han sido las temperaturas máximas y mínimas en cada una de ellas.

AUTOEVALUACIÓN

1. Las coordenadas del punto señalado son:
   a) (–1, 2)
   b) (–2, –1)
   c) (1, 2)
   d) (1, –2)



2. La única gráfica que no corresponde a una función es:

a)  b)  c)  d) 

3. La única tabla que no puede ser de una relación funcional es:

a)

x	*y*
0	1
1	2
2	3
3	4

b)

x	*y*
–1	–3
0	–3
1	–3
2	–3

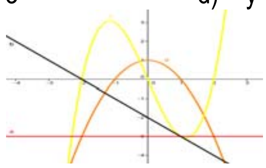
c)

x	*y*
–3	9
–1	1
0	0
2	4

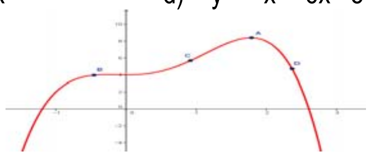
d)

x	*y*
0	2
1	3
4	6
0	3

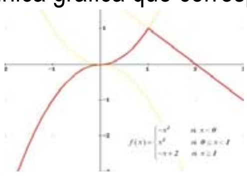
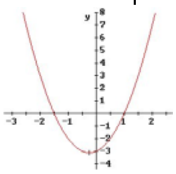
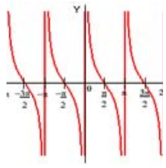
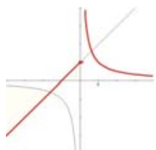
4. La única función afín que, además, es lineal es:
   a) $y = –4x$ b) $y = 3x + 1$ c) $y = –2x + 3$ d) $y = –x – 1$
5. La única gráfica de una función afín no constante es:
   a) b) c) d)



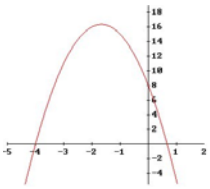
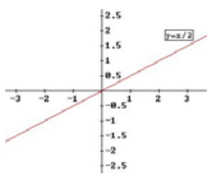
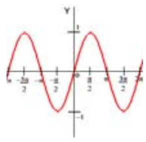
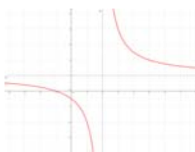
6. La única función cuadrática es:
   a) $y = –2x$ b) $y = 3x + 1$ c) $y = –2x^2 + 3x$ d) $y = –x^3 – 1$
7. La función cuadrática que tiene su vértice en el punto (3, 4) es:
   a) $y = –2x^2$ b) $y = 3x^2–x + 1$ c) $y = –2x^2 + 3x$ d) $y = –x^2 +6x– 5$
8. El máximo absoluto de la función se alcanza en el punto:
   a) b) c) d)



9. La única gráfica que corresponde a una función periódica es:

a)  b)  c)  d) 

10. La única gráfica que corresponde a una función que es siempre creciente hasta $x = –2$ es:

a)  b)  c)  d) 

CAPÍTULO 11: ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD.
Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas: 3º B de ESO

1. LA TOMA DE DATOS

1.1. Un ejemplo para realizar un análisis

Ejemplo:

La Casa de la Moneda quiere estudiar cuántas monedas debe emitir, teniendo en cuenta las que están en circulación y las que se quedan atesoradas (bien en casas particulares, o en máquinas de refrescos, o depositadas en un banco). Se ha hecho una encuesta a pie de calle a 60 personas y se ha apuntado cuántas monedas llevaba cada una de ellas en el bolsillo. Hemos obtenido estos datos:

12	7	11	8	8	9	6	12	7	7	13	0	10	9	13	18	7	6	11	12	16	0	10	10	8	8	9	11	10	8
16	8	5	2	12	8	14	14	16	6	2	0	18	10	10	12	14	6	7	3	12	11	10	18	9	7	12	1	15	8

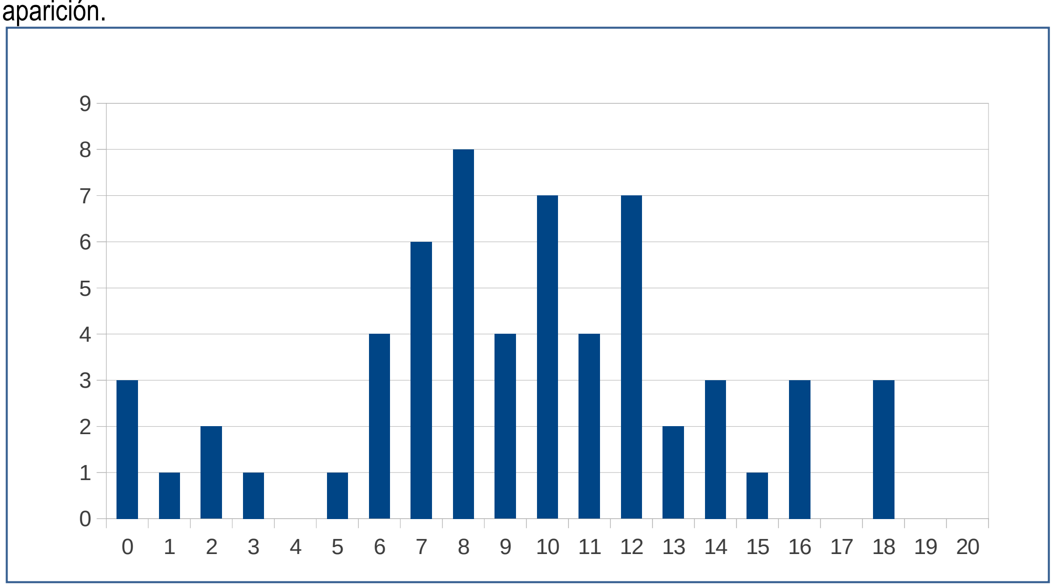
El primer paso consiste en hacer un esquema para el recuento: usaremos una tabla y marcaremos palotes cada vez que aparezca ese número.

0	///	**7**	///// /	**14**	///
1	/	**8**	///// ///	**15**	/
2	//	**9**	////	**16**	///
3	/	**10**	///// //	**17**	
4		**11**	////	**18**	///
5	/	**12**	///// //	**19**	
6	////	**13**	//	**20**	

Pasar de ese recuento a una tabla de frecuencias absolutas es muy sencillo: solo hay que sustituir los palotes por el número que representan.

0	3	**7**	6	**14**	3
1	1	**8**	8	**15**	1
2	2	**9**	4	**16**	3
3	1	**10**	7	**17**	0
4	0	**11**	4	**18**	3
5	1	**12**	7	**19**	0
6	4	**13**	2	**20**	0

Es mucho mejor analizar los datos de modo visual. Estamos más acostumbrados a trabajar de esa manera. Podemos representar los datos de la tabla de frecuencias en un diagrama de barras, donde la altura de cada barra representa la frecuencia de aparición.



El procesamiento de datos estadísticos se utiliza mucho. Obviamente no se hacen las operaciones a mano, sino que se

Autor: Fernando Blasco
Revisor: Andrés Hierro
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

utilizan calculadoras u hojas de cálculo. Disponer de esos medios tecnológicos será un buen complemento para el capítulo, aunque recordamos que lo más importante es comprender qué se hace en cada momento.

Comenzaremos introduciendo algo de nomenclatura. Casi todos estos nombres los has escuchado puesto que los medios de comunicación los utilizan muchísimo

Población es el colectivo sobre el que se quiere hacer el estudio.

Muestra es un subconjunto de la población de modo que a partir de su estudio se pueden obtener características de la población completa.

Individuo es cada uno de los elementos de la población o la muestra.

Ejemplo:

- *Se quiere hacer un estudio sobre hábitos alimenticios de los estudiantes de 3º de ESO de todo Madrid. Pero como es muy costoso entrevistar a todos los estudiantes se decide tomar un IES por cada distrito y entrevistar a los alumnos de 3º de ESO de esos colegios elegidos.*

La **población** objeto del estudio serán todos los estudiantes madrileños matriculados en 3º de ESO.

La **muestra** son los estudiantes de 3º de ESO matriculados en los institutos elegidos.

Cada uno de los estudiantes de 3º de ESO es un **individuo** para este estudio estadístico.

Actividades propuestas

1. Queremos hacer un estudio de la cantidad de monedas que llevan en el bolsillo los estudiantes de tu clase. Pero para no preguntar a todos elige 10 compañeros al azar y anota en tu cuaderno cuántas monedas lleva cada uno.
   a) ¿Cuál es la población objeto del estudio?
   b) ¿Cuál es la muestra elegida?
   c) Especifica 5 individuos que pertenezcan a la población y no a la muestra.

1.2. Variables estadísticas

Ejemplo:

- *En un estudio estadístico se puede preguntar cosas tan variopintas como*
  - ¿Qué frutas comes a lo largo de una semana?
  - ¿Cuántas piezas de fruta comes al día?
  - ¿Cuántas monedas llevas en el bolsillo?
  - ¿Cuál es tu altura?
  - ¿Cuántas marcas de chocolate recuerdas?
  - ¿Cuáles son las marcas de chocolate que recuerdas?
  - ¿Cuántos hermanos tienes?
  - ¿Cuál es tu color favorito para un coche?
  - ¿Cuánto tiempo pasas al día viendo la televisión?
  - ¿Cuántos seguidores tienes en twitter?

Esas preguntas pueden corresponder a estudios de salud, económicos, publicitarios o socioeconómicos. Algunas se responden con un número y otras se responden con un nombre o un adjetivo. Incluso hay diferencias entre las que se responden con números: el número de monedas que llevas o el número de seguidores de *twitter* se contestan con números enteros, mientras que para hallar tu altura o las horas que pasas delante del televisor necesitamos utilizar números reales (normalmente con representación decimal).

Una variable se dice **cuantitativa** si sus valores se expresan con números.

Las variables cuantitativas pueden ser:

- **discretas** si solo admiten valores aislados
- **continuas** si entre dos valores pueden darse también todos los intermedios

Una variable estadística es **cualitativa** cuando sus valores no se expresan mediante un número, sino con una cualidad.

Actividades propuestas

2. Clasifica en variables cualitativas y cuantitativas las que aparecen en el primer ejemplo de esta sección. Para las cuantitativas indica si son continuas o discretas.

1.3. Las fases de un estudio estadístico

En un estudio estadístico hay 6 fases fundamentales:

1. Determinación del objeto del estudio. Esto es, saber qué queremos estudiar.
2. Selección de las variables que se van a estudiar.
3. Recogida de los datos.
4. Organización de los datos.
5. Representación y tratamiento de los datos.
6. Interpretación y análisis.

En este libro empezaremos los ejemplos a partir del punto 4, con datos ya proporcionados en los enunciados.

1.4. Métodos de selección de una muestra estadística. Representatividad de una muestra

Para recoger los datos y determinar los valores de la variable se puede utilizar a toda la población, todo el universo sobre el que se realiza el estudio, o seleccionar una muestra. En muchas ocasiones no es conveniente recoger valores de toda la población, porque es complicado o demasiado costoso, o incluso porque es imposible como en el caso de un control de calidad en que se destruya el objeto a analizar. La parte de la Estadística que se ocupa de cómo seleccionar adecuadamente las muestras se denomina *Teoría de Muestras*.

Ejemplos:

- Si estudiamos el peso de los habitantes de una ciudad, la población será el total de las personas de dicha ciudad.
- Pero lo normal será no recoger información sobre todas las personas de la ciudad (ya que sería una labor muy compleja y costosa), sino que se suele seleccionar un subgrupo (muestra) que se entienda que es suficientemente representativo.
- Para conocer la intención de voto ante unas elecciones europeas, municipales, autonómicas… se utilizan muestras, pues preguntar a toda la población sería muy costoso (y eso ya se hace en las elecciones).
- Pero si una fábrica quiere conocer las horas de vida útil de un tipo de bombilla, no puede poner a funcionar a toda la población, todas las bombillas, hasta que se estropeen pues se queda sin producción. En este caso es imprescindible seleccionar una muestra.
- En *control de calidad* se hacen estudios estadísticos y se toman muestras.

Para determinar la mejor forma de seleccionar una muestra existe toda una parte de la Estadística, la *Teoría de Muestras*, que nos indica varios detalles a tener en cuenta:

- ¿Cómo se deben elegir los elementos de la muestra?
- ¿Cuál debe ser el tamaño de la muestra?
- ¿Hasta qué punto la muestra es representativa de la población?

La forma de seleccionar la muestra, ***muestreo***, debe reunir unas determinadas características para que pueda caracterizar a la población, ser ***representativa*** de la población. Debe ser un muestreo **aleatorio**, es decir, al azar. Si la muestra está mal elegida, no es representativa, se producen **sesgos**, errores en los resultados del estudio.

Todos los individuos de la población deben tener las mismas posibilidades de ser seleccionados para la muestra.

Ejemplos:

- *Se quiere estudiar el nivel adquisitivo de los personas de una ciudad, para lo que pasamos una encuesta a la puerta de unos grandes almacenes, ¿te parece un muestreo aleatorio?*

No lo es. Las personas que entran en un determinado establecimiento no representan a toda la población.

- *Vas a hacer un estudio sobre los gustos musicales de los jóvenes, y para ello, preguntas a cinco de entre tus amistades, ¿te parece un muestreo aleatorio?*

No lo es. Tus amistades pueden tener unos gustos diferentes a los del resto de la población.

Métodos de selección de una muestra

Hay varios métodos para seleccionar una muestra, que darían para analizar en un libro sobre "Muestreo". Pero es conveniente conocer alguno. Veamos tres de ellos:

Muestreo aleatorio simple

Todos los individuos de la población tienen la misma probabilidad de ser elegidos en la muestra.

Muestreo aleatorio sistemático

Se ordenan los individuos de la población. Se elige al azar un individuo, y se selecciona la muestra tomando individuos mediante saltos igualmente espaciados.

Muestreo aleatorio estratificado

Se divide la población en grupos homogéneos de una determinada característica, *estratos*, por ejemplo edad, y se toma una muestra aleatoria simple en cada estrato.

Ejemplo:

- Se estudia el estado de los huesos de la población de un país, y se divide la población en "niños", "jóvenes", "edad media" y "tercera edad". En cada grupo se hace un muestreo aleatorio simple.

Representatividad de una muestra

Cuando se elige una muestra los dos aspectos que hay que tener en cuenta son, el tamaño y la representatividad de la muestra.

Si la muestra es demasiado pequeña, aunque esté bien elegida, el resultado no será fiable.

Ejemplo:

- *Queremos estudiar la estatura de la población española. Para ello elegimos a una persona al azar y la medimos.*

Evidentemente este resultado no es fiable. La muestra es demasiado pequeña.

Si la muestra es demasiado grande los resultados serán muy fiables, pero el gasto puede ser demasiado elevado. Incluso, en ocasiones, muestras demasiado grandes no nos proporcionan mejores resultados.

Cuando una muestra tenga el tamaño adecuado, y haya sido elegida de forma aleatoria diremos que es una **muestra representativa**.

Si la muestra no ha sido elegida de forma aleatoria diremos que la muestra es **sesgada**.

Actividades propuestas

3. Señalar en qué caso es más conveniente estudiar la población o una muestra:
   a) El diámetro de los tornillos que fabrica una máquina diariamente.
   b) La altura de un grupo de seis amigos.

4. Se puede leer el siguiente titular en el periódico que publica tu instituto: "*La nota media de los alumnos de 3º ESO es de* 7'9". ¿Cómo se ha llegado a esta conclusión? ¿Se ha estudiado a toda la población? Si hubieran seleccionado para su cálculo solo a las alumnas, ¿sería representativo su valor?
5. En una serie de televisión tienen dudas sobre qué hacer con la protagonista, si que tenga un accidente o si debe casarse. Van a hacer una consulta. ¿A toda la población o seleccionado una muestra representativa? Razona la respuesta.

2. REPRESENTACIÓN DE LA INFORMACIÓN

2.1. Ejemplos para trabajar

En la sección anterior lo comenzábamos analizando una variable discreta: el número de monedas que se llevan en el bolsillo. Puedes repasar qué hacíamos allí: cómo recontábamos los datos, cómo los llevábamos después a una tabla de frecuencias y cómo representábamos la información en un gráfico.

Haremos ahora el mismo proceso con una variable continua.

Ya sabes que:

Podemos distinguir entre **frecuencias absolutas**, si, como en este ejemplo, hacemos un recuento del número de veces que aparece cada dato. **Frecuencias relativas**, que estudiaremos con más detenimiento al final del capítulo, y que consiste en dividir cada frecuencia absoluta por el número total de observaciones. **Frecuencias acumuladas**, tanto frecuencias absolutas acumuladas como frecuencias relativas acumuladas si se calculan todos los valores menores o iguales a él.

Ejemplos:

- Se está realizando un control del peso de un grupo de niños. Para ello, se contabilizan el número de veces que comen al día una chocolatina 13 niños durante un mes, obteniendo los siguientes números:

2, 5, 3, 2, 0, 4, 1, 7, 4, 2, 1, 0, 2.

La información obtenida se puede resumir en una tabla de frecuencias **absolutas** y frecuencias **absolutas acumuladas**:

Valores	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Frecuencia absoluta	2	2	4	1	2	1	0	1
Frecuencia absoluta acumulada	2	4	8	9	11	12	12	13

También se puede resumir en una tabla de frecuencias **relativas** y frecuencias **relativas acumuladas**:

Valores	0	1	2	3	4	5	6	7
Frecuencia relativa	0'154	0'154	0'307	0'077	0'154	0'077	0	0'077
Frecuencia relativa acumulada	0'154	0'308	0'615	0'692	0'846	0'923	0'923	1

- En una fábrica se realiza un estudio sobre el espesor, en *mm*, de un cierto tipo de latas de refresco. Con este fin, selecciona una muestra de tamaño *N* = 25, obteniendo los siguientes valores: 7'8, 8'2, 7'6, 10'5, 7'4, 8'3, 9'2, 11'3, 7'1, 8'5, 10'2, 9'3, 9'9, 8'7, 8'6, 7'2, 9'9, 8'6, 10'9, 7'9, 11'1, 8'8, 9'2, 8'1, 10'5.

Esta información se puede resumir haciendo cinco intervalos y haciendo una tabla de frecuencias absolutas, frecuencias absolutas acumuladas, frecuencias relativas y frecuencias relativas acumuladas

Intervalos de clase	**(7, 8]**	**(8, 9]**	**(9, 10]**	**(10, 11]**	**(11, 12]**
Marcas de clase	7'5	8'5	9'5	10'5	11'5
Frecuencia absoluta	6	8	5	4	2
Frecuencia relativa	0'24	0'32	0'2	0'16	0'08
Frecuencia relativa acumulada	0'24	0'56	0'76	0'92	1

Ejemplo:

- *Las alturas de los 12 jugadores de la Selección Española de Baloncesto (en metros) que participaron en la Eurocopa 2013 se recogen en la siguiente tabla:*

2'03	1'96	1'91	2'11	1'91	1'93	2'08	1'99	1'90	2'16	2'06	2'03

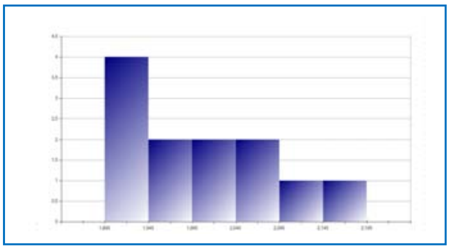
Como los datos son continuos, para hacer el recuento fijaremos intervalos de altura:

- entre 1'895 y 1'945 ////
- entre 1'945 y 1'995 //
- entre 1'995 y 2'045 //

- entre 2’045 y 2’095 //
- entre 2’095 y 2’145 /
- entre 2’145 y 2’195 /

Ahora llevamos los datos del recuento a un diagrama de frecuencias:

entre 1’895 y 1’945	4
entre 1’945 y 1’995	2
entre 1’995 y 2’045	2
entre 2’045 y 2’095	2
entre 2’095 y 2’145	1
entre 2’145 y 2’195	1



En este caso la representación gráfica la hacemos con un histograma de frecuencias.

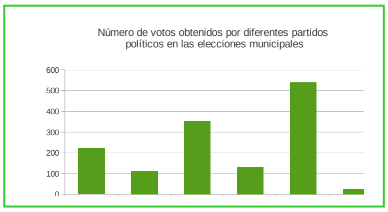
Observa la diferencia entre este gráfico (correspondiente a una variable continua) y el que hicimos para el recuento de monedas (que representaba una variable discreta). Este gráfico se denomina histograma de frecuencias y es similar a un diagrama de barras pero ahora representamos unas barras pegadas a otras, para recordar que se trata de intervalos de clase y no de valores aislados de las variables.

2.2. Diagramas de barras

Se utiliza para representar datos de variables estadísticas discretas o variables estadísticas cualitativas.

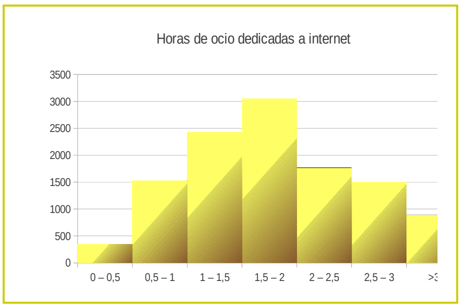
Al principio del capítulo estudiando el número de monedas que se llevan en el bolsillo. Podemos utilizar este tipo de gráfico en otras situaciones.

El gráfico anterior representa el número de alumnos (de una clase de 35) que han aprobado todo, el de alumnos con 1 asignatura suspensa, con dos asignaturas suspensas, etc. Lo bueno de la representación gráfica es que de un solo vistazo sabemos que 20 alumnos han aprobado todo y que hay un alumno que tiene 7 asignaturas suspensas.



También podemos utilizar diagramas de barras para representar variables cualitativas, como la elección de la modalidad de bachillerato que cursan los alumnos de un IES o las preferencias políticas de los ciudadanos de un municipio.

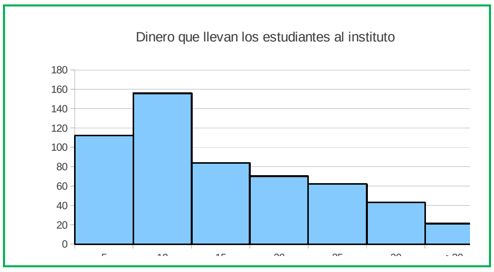
2.3. Histograma de frecuencias



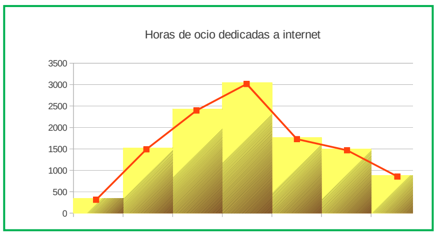
Este tipo de gráfico lo hemos utilizado antes para representar las alturas de los jugadores de la Selección Española de Baloncesto.

Es similar a un diagrama de barras pero la altura de cada barra viene dada por el número de elementos que hay en cada clase.

Otras variables que podemos considerar como variables continuas son el número de horas que los jóvenes de una población dedican a internet en sus ratos de ocio o la cantidad de dinero que se lleva en el bolsillo (ojo, esto no es el número de monedas).



En el gráfico que incluimos a continuación las marcas del eje de las *x* se refieren a los tramos de dinero expresados de 5 en 5 euros. La altura del gráfico se corresponde con la cantidad de alumnos que llevan esa cantidad de dinero. De un simple vistazo se ve que hay algo más de 150 alumnos que llevan entre 5 € y 10 € al instituto y que poco más de 40 alumnos llevan entre 25 € y 30 €.



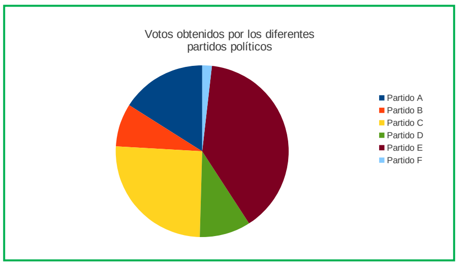
Las barras son más anchas y aparecen unas a continuación de otras para destacar que estamos representando una variable continua y que las alturas se corresponden con individuos dentro de un intervalo de datos.

2.4. Polígono de frecuencias

Se utiliza en los mismos casos que el histograma. Pero da idea de la variación de la tendencia. La línea poligonal se construye uniendo los puntos medios de los lados superiores de los rectángulos.

2.4. Diagrama de sectores

En algunas ocasiones nos interesa hacernos a la idea de la proporción que tiene cada resultado en relación con los demás. Se utiliza mucho con variables cualitativas. Por ejemplo, esta representación se utiliza para mostrar los resultados de unas las elecciones cuando queremos comparar los votos obtenidos por los diferentes partidos.



En un diagrama de sectores aparecen representados sectores circulares. El ángulo de estos sectores es proporcional a la frecuencia absoluta.

Retomando el ejemplo de los resultados obtenidos por diferentes partidos políticos vamos a representar esos mismos resultados mediante un diagrama de sectores:

Actividades propuestas

6. Reúne a 10 amigos. Recuenta cuántas monedas de cada valor (1céntimo, 2 céntimos, 5 céntimos, …) tenéis entre todos. Representa mediante un gráfico adecuado el número de monedas de cada clase que hay. ¿Hay algún otro diagrama que te permita ver qué tipos de monedas son más abundantes en la muestra que has tomado?
7. En la clase de Educación Física el profesor ha medido el tiempo que tarda cada alumno en recorrer 100 metros. Los resultados están en esta tabla:

14’92	13’01	12’22	16’72	12’06	10’11	10’58	18’58	20’07	13’15	20’10	12’43	17’51	11’59	11’79
16’94	16’45	10’94	16’56	14’87	17’59	13’74	19’71	18’63	19’87	11’12	12’09	14’20	18’30	17’64

Agrupa estos resultados por clases, comenzando en 10 segundos y haciendo intervalos de longitud 1 segundo. Realiza una tabla de frecuencias y representa adecuadamente estos datos.

3. PARÁMETROS ESTADÍSTICOS

3.1. Introducción

Seguro que sabes qué es la media de dos números y probablemente sabes calcular la media de una serie de datos. Pero además de esa medida estadística hay otras medidas que pueden ser interesantes para conocer propiedades de los datos que tenemos.

Ahora estudiaremos las **medidas de centralización** (media, mediana y moda) que nos proporcionan un valor de referencia en torno al que se distribuyen los datos y las **medidas de dispersión** (recorrido, desviación media, varianza y desviación típica). Estas medidas nos indican cómo están de separados los datos en torno a la media.

Ejemplo:

- *Imagina que en dos exámenes de matemáticas obtienes un* 6 y un 5. La media es 5.5. Supón ahora que las notas que has tenido son 10 y 1. La media también es 5.5 pero deberás estudiarte la parte en la que has sacado 1 para recuperar. Las medidas de dispersión nos van a servir para detectar cuándo tenemos valores extremos, alejados de la media.

3.2. Medidas de centralización

La **media** se calcula sumando todos los valores y dividiendo entre el número de datos.

Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son los valores que toma la variable estadística que estamos considerando, la media se representa por $\overline{x}$ y se calcula mediante la fórmula

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Esa suma se puede escribir abreviadamente como $\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n}$. El símbolo $\sum$ se utiliza habitualmente para representar sumas de varios sumandos. Lo utilizarás mucho a partir de ahora.

Para calcular la **mediana** se ordenan todos los datos de menor a mayor y nos quedamos con el que ocupa la posición central. Si tenemos un número par de datos, tomamos como mediana la media de los dos números que ocupan las posiciones centrales. La representaremos por *Me*.

La ***mediana*** *Me* es un valor tal que el 50 % de las observaciones son inferiores a él.

Los ***cuartiles*** Q_1, Q_2 y Q_3 son los valores tales que el 25 %, 50 % y 75 % (respectivamente) de los valores de la variable son inferiores a él. Por tanto la mediana coincide con el segundo cuartil.

Usamos el término **moda** para referirnos al valor que más se repite. La denotamos por *Mo*.

Ejemplo.-

- *Continuamos utilizando los datos de estatura correspondientes a los 12 jugadores de la Selección Española de Baloncesto (ver sección 2.1 de este capítulo).*

Autor: Fernando Blasco
Revisor: Andrés Hierro
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

La estatura **media** se calcula sumando todas las alturas y dividiendo entre el número de datos.

$\sum x_i$ = 2'03+2'06+2'16+1'90+1'99+2'08+1'93+1'91+2'11+1'91+1'96+2'03=24'07. $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$ = $\frac{24.07}{12}$ = 2'0058.

En este ejemplo no podemos hablar de **moda**, puesto que no hay un único valor que sea el que más se repite.

La **mediana** en este caso es 2.01. Para calcularla ordenamos todos los datos de menor a mayor y nos quedamos con el que ocupa la posición central. Como en este caso tenemos un número impar de datos, tomamos como mediana la media aritmética de los 2 que ocupan las posiciones centrales.

Los datos, tras ordenarlos, quedarían así:

1'90	1'91	1'91	1'93	1'96	1'99	2'03	2'03	2'06	2'08	2'11	2'16

Media de ambos=2'01

Para calcular los **cuartiles** tenemos que dividir el total de datos, en este ejemplo 12, entre 4, (o multiplicar por 0'25 que es lo mismo) y obtenemos 3. Luego el primer cuartil observamos que está entre 1'91 y 1'93, hacemos la media y obtenemos que Q_1 = 1'92. Para calcular el tercer cuartil multiplicamos por 3 y dividimos por 4, (o multiplicamos por 0'75) y en este caso se obtiene el valor que está entre 9, 2'06, y 10, 2'08, por lo que Q_3 = 2'07.

3.3. Medidas de dispersión

Recorrido es la diferencia entre el dato mayor y el dato menor. También se denomina **rango**.

Desviación media es la media de las distancias de los datos a la media de los datos de los que dispongamos.

$$DM = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \ldots + |x_n - \bar{x}|}{n} = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n}$$

Varianza es la media de los cuadrados de las distancias de los datos a la media.

$$\text{Varianza} = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

Equivalentemente (desarrollando los cuadrados que aparecen en la expresión) se puede calcular mediante esta otra expresión: Varianza = $\frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}$

Desviación típica es la raíz cuadrada de la varianza.

Se representa por σ. $\sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}}$

Recorrido intercuartílico o **intervalo intercuartil** es la distancia entre el tercer y el primer cuartil: $R = Q_3 - Q_1$.

Estas fórmulas provienen de diferentes modos de medir las distancias. Para el cálculo de la desviación media se usan valores absolutos, que es como se mide la distancia entre números en la recta real. La desviación típica tiene que ver con la forma de medir distancias en el plano (recordemos que la hipotenusa de un triángulo es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los catetos). No hace falta que comprendas ahora de dónde salen estas fórmulas pero sí es conveniente que sepas que no es por capricho de los matemáticos que lo inventaron. Cada cosa a su tiempo...

Ejemplo

- *Volvemos a usar los datos del ejemplo de la Selección Española con los que venimos trabajando.*

Recorrido: 2'16-1'90 = 0'26 (metros). Esto es la diferencia de alturas entre el jugador más alto y el más bajo.

Para calcular la **desviación media** primero calcularemos la suma que aparece en el numerador. Después dividiremos entre el número de datos.

|2'03 – 2'0058| + |2'06–2'0058| + |2'16–2'0058| + |1'90–2'0058| + |1'99–2'0058| + |2'08–2'0058| +
|1'93 – 2'0058| +| 1'91 – 2'0058| + |2'11 – 2'0058| + |1'91 – 2'0058| + |1'96 – 2'0058| + |2'03 – 2'0058| =
0'0242 + 0'0458 + 0'0958 + 0'1042 + 0'0958 + 0'0758 + 0'0742 + 0'0158 + 0'1058 + 0'1542 + 0'9458 + 0'0242 = 0'87

Así la desviación media es 0'87/12 = 0'0725

Para calcular la **varianza** primero calcularemos la suma que aparece en el numerador, de modo similar a como acabamos de hacer. Después terminaremos dividiendo entre el número de datos.

$(2'03 - 2'0058)^2 + (2'06 - 2'0058)^2 + (2'16 - 2'0058)^2 + (1'90 - 2'0058)^2 + (1'99 - 2'0058)^2 + (2'08 - 2'0058)^2 +$
$(1'93 - 2'0058)^2 + (1'91 - 2'0058)^2 + (2'11 - 2'0058)^2 + (1'91 - 2'0058)^2 + (1'96 - 2'0058)^2 + (2'03 - 2'0058)^2 = 0'08934$

Así la varianza es 0'08934 / 12 = 0'00744

La **desviación típica** es la raíz cuadrada de la varianza: $\sigma = \sqrt{0'00744}$= 0'08628.

Recorrido intercuartílico o **intervalo intercuartil** se calcula restando $Q_3 - Q_1$ = 2'07 – 1'92 = 0'15.

Autor: Fernando Blasco
Revisor: Andrés Hierro
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Las medidas de posición nos permiten realizar otro tipo de gráfico estadístico que se llama el *gráfico de caja*.

3.4. Cálculo detenido de los parámetros estadísticos

Lo más cómodo para calcular parámetros estadísticos es utilizar una hoja de cálculo. Las calculadoras científicas también incorporan funciones para obtener los principales parámetros estadísticos. Para saber cómo usar tu calculadora puedes leer el manual que viene con ella.

Ahora veremos cómo se pueden utilizar las tablas de frecuencias para calcular la media y la varianza.

Cuando hay valores repetidos en vez de sumar ese valor varias veces podemos multiplicar el valor por su frecuencia absoluta. También, el número de datos es la suma de las frecuencias.

De este modo obtenemos la siguiente **fórmula para la media:** $\bar{x} = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i}$

Análogamente, la **varianza** se puede calcular mediante: Varianza = $\sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}$

o, alternativamente, mediante la expresión: $\sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2$

(Estas dos fórmulas son equivalentes. La segunda expresión se obtiene desarrollando los cuadrados de la primera y simplificando).

Actividades resueltas

- *Las notas de 15 alumnos en un examen de matemáticas se reflejan en la siguiente tabla*

7	7	6	6	10	1	4	5	5	3	9	5	5	8	6

Queremos calcular su media y su varianza.

En primer lugar, elaboramos una tabla de frecuencias con esos datos:

x_i	f_i
1	1
2	0
3	1
4	1
5	4
6	3
7	2
8	1
9	1
10	1

Añadimos una columna en la que escribiremos el resultado de multiplicaremos la frecuencia y el valor, esto es, .

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$
1	1	1
2	0	0
3	1	3
4	1	4
5	4	20
6	3	18
7	2	14
8	1	8
9	1	9
10	1	10
	$\sum f_i = n = 15$	$\sum x_i \cdot f_i = 87$

Sumando las frecuencias (columna central) obtenemos el número de datos.

Así la media es el cociente entre la suma de la columna de la derecha entre la suma de la columna central: $\bar{x} = \frac{87}{15} = 5'8$.

Para calcular la varianza añadiremos una columna más a la tabla anterior. En esa columna escribiremos el producto de la

Autor: Fernando Blasco
Revisor: Andrés Hierro
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

frecuencia por el cuadrado del valor.

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	$x_i^2 \cdot f_i$
1	1	1	1
2	0	0	0
3	1	3	9
4	1	4	16
5	4	20	100
6	3	18	108
7	2	14	98
8	1	8	64
9	1	9	81
10	1	10	100
	$\sum f_i = n = 15$	$\sum x_i \cdot f_i = 87$	$\sum x_i^2 \cdot f_i = 577$

Así la varianza es $\sigma^2 = \dfrac{577}{12} - 5'8^2 = 14'4433$

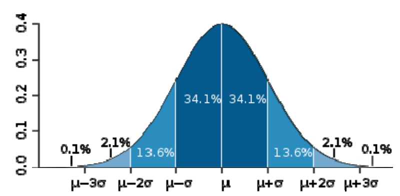
Y la desviación típica es $\sigma = \sqrt{14'4433} = 3'8004$.

3.5. Interpretación conjunta de la media y la desviación típica

Hemos visto que la desviación típica nos mide la distancia de los datos respecto de la media. Nos da mucha información. Informa sobre cómo se agrupan los datos alrededor de la media.

Si los datos que hemos recogido tuvieran una distribución normal (de momento no sabemos lo que esto significa exactamente dentro de la Estadística, pero puedes suponer que significa eso, que son normales, que no les pasa nada raro) resulta que en el intervalo entre la media menos una desviación típica y la media más una desviación típica están más del 68 % de los datos. En el intervalo entre la media menos 2 desviaciones típicas y la media más 2 desviaciones típicas están más del 95 % de los datos, y entre la media menos 3 desviaciones típicas y la media más 3 desviaciones típicas están más del 99'7 % de los datos.

Se podría decir que algo, por ejemplo la inteligencia de una persona, la altura de una planta o el peso de un animal... es normal si está dentro de ese intervalo ($\bar{x} - \sigma$, $\bar{x} + \sigma$), que es inteligente, alto o pesado si está entre ($\bar{x} + \sigma$, $\bar{x} + 2\sigma$), o que es un genio, gigante o muy pesado si está en el intervalo ($\bar{x} + 2\sigma$, $\bar{x} + 3\sigma$).



Media y desviación típica. Imagen de Wikipedia

Observa que estamos diciendo que prácticamente todos los datos distan de la media menos de 3 desviaciones típicas y que más del 68 % distan menos de una desviación típica. Esto va a ser de gran utilidad pues conecta con otras ramas de la Estadística. Hasta ahora hemos estado describiendo lo que ocurre. Ahora vamos a poder tomar decisiones, inferir o predecir con una cierta probabilidad lo que va a ocurrir. Por eso vamos a estudiar a continuación las probabilidades.

3.6. Diagrama de cajas o de bigotes

El **diagrama de cajas** es una representación gráfica en la que se utilizan los cuartiles, la mediana, los valores máximos y mínimos… intentando visualizar todo el conjunto de datos.

Se forma un rectángulo (o caja) cuyos lados son los cuartiles (Q_1 y Q_3) y donde se señala en el centro, la mediana (*Me*). Se añaden dos brazos (o *bigotes*) donde se señalan los valores máximo (*Máx*) y mínimo (*Mín*).

Se pueden calcular, además, unos límites superior e inferior. El inferior, L_i; es Q_1 – 1'5 por el intervalo intercuartil, y el superior Ls es Q_3 + 1'5 por el intervalo intercuartil.

Ejemplo

- Nieves ha tenido en Matemáticas las siguientes notas: 8, 4, 6, 10 y 10. Calcula su recorrido, la varianza, la desviación típica, los cuartiles y el intervalo intercuartil.

Ordenamos los datos: $4 \leq 6 \leq 8 \leq 10 \leq 10$, y calculamos que:

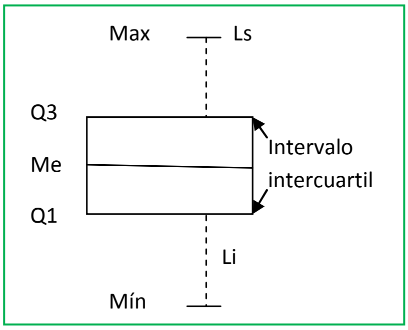
Mediana = *Me* = 8.

$Q_1 = 6$. $Q_3 = 10$.

Intervalo intercuartil = 10 – 6 = 4.

Los bigotes nos indican:

Autor: Fernando Blasco
Revisor: Andrés Hierro
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF



Máx = 10. Mín = 4.

Ls = Q3 + 4*1'5 = 16. Li = Q1 – 4*1'5 = 0.

En este ejemplo el máximo es igual a 10, que es menor que el posible extremo superior, igual a 16. El mínimo es 4, mayor que el extremo inferior, luego no hay valores *atípicos* que sean mayores que el límite superior o menores que el límite inferior. Los extremos de los bigotes, en nuestro ejemplo son 10 y 4.

El diagrama de caja es el de la figura del margen.

4. INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DE PROBABILIDADES

4.1. Conceptos básicos en probabilidad

Todos los días aparecen en nuestra vida hechos que tienen que ver con la probabilidad. Si jugamos al parchís, intuimos que *más o menos* una de cada 6 veces saldrá un 5, con lo que podremos sacar una ficha a recorrer el tablero. En el 'Monopoly' sacar un doble tres veces seguidas nos manda a la cárcel ("sin pasar por la casilla de salida"). Esto no ocurre muchas veces; sin embargo, todos los que hemos jugado a esto hemos ido a la cárcel por ese motivo.

La probabilidad es una medida de lo factible que es que tenga lugar un determinado suceso.

Para estudiar la probabilidad, debemos introducir algunos nombres. Lo vamos a hacer con ayuda de un caso concreto.

Ejemplo

- *Imaginemos que tenemos una bolsa con 5 bolas: 2 blancas, 2 rojas y una negra. Hacemos el siguiente* **experimento aleatorio***: meter la mano en la bolsa y mirar el color de la bola que ha salido.*

Hay 3 *casos* posibles: "que la bola sea blanca", "que la bola sea roja" o "que la bola sea negra". Abreviadamente los representaremos por *blanca*, *roja* o *negra* (también podremos representar los colores o escribir B, R o N; recuerda que en matemáticas siempre se debe simplificar, incluso la manera de escribir).

El **espacio muestral** es el conjunto de todos los casos posibles: {B, R, N}.

Los diferentes **sucesos** son los subconjuntos del espacio muestral. En nuestro ejemplo los sucesos posibles son {B},{R}, {N}, {B,R}, {B,N}, {R,N}, {B,R,N}.

Es seguro que en nuestro experimento la bola que sacamos es "blanca", "negra" o "roja". Por eso al espacio muestral se le llama también **suceso seguro**.

Recuerda estos nombres:

Un **experimento aleatorio** es una acción (experimento) cuyo resultado depende del azar.

A cada uno de los resultados posibles de un experimento aleatorio le llamaremos **caso** o **suceso individual**.

El conjunto de todos los casos posibles se llama **espacio muestral** o **suceso seguro**.

Un **suceso** es un subconjunto del espacio muestral.

Ejemplos.

1. *Baraja española de 40 cartas*. Experimento: sacamos una carta al azar y miramos su palo.

Espacio muestral {oros, copas, espadas, bastos}

2. *Experimento:* lanzamos simultáneamente 1 moneda de euro y una de 2 euros al aire.

Espacio muestral:{Cara-Cara, Cara-Cruz, Cruz-Cara, Cruz-Cruz}

3. *Experimento:* lanzamos simultáneamente 2 monedas de 1 euro (indistinguibles)

Espacio muestral: {Salen 2 caras, Salen 2 cruces, Sale 1 cara y una cruz}

4. *Experimento*: lanzamos una moneda de 1 euro y apuntamos qué ha salido; la volvemos a lanzar y apuntamos el resultado.

Espacio muestral: {CC, CX, XC, XX}

5. *Experimento:* lanzamos simultáneamente dos dados y sumamos los números que se ven en las caras superiores.

Espacio muestral:{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

6. *Experimento:* lanzamos un dado usual y sumamos los números que aparecen en la cara superior y la cara inferior (la que no se ve, que está sobre la mesa).

Espacio de sucesos: {7}

En los ejemplos anteriores, (2) y (4) son equivalentes: los posibles resultados del lanzamiento de 2 monedas que se distinguen son los mismos que los del lanzamiento de una misma moneda dos veces (por ejemplo, equiparamos el resultado del lanzamiento de la moneda de 1 euro del ejemplo 3 con el primer lanzamiento de la moneda del ejemplo 4 y el resultado del lanzamiento de la moneda de 2 euros con el segundo lanzamiento).

En el experimento 6 siempre sale el mismo resultado (por alguna razón los puntos en los dados usuales se distribuyen siempre de modo que las caras opuestas suman 7). Técnicamente éste no es un experimento aleatorio, puesto que el resultado no depende del azar.

Actividades propuestas

8. Para cada uno de los ejemplos 1 a 5 anteriores indica 3 sucesos diferentes que no sean sucesos individuales.
9. En una bolsa tenemos 10 bolas rojas numeradas del 1 al 10. Se hacen los dos experimentos siguientes:

EXPERIMENTO A: Se saca una bola de la bolsa y se mira su color.

EXPERIMENTO B: Se saca una bola de la bolsa y se mira su número.

¿Cuál de estos experimentos no es un experimento aleatorio? ¿Por qué?

Para el experimento que sí es un experimento aleatorio indica su espacio muestral.

10. Una baraja francesa tiene 52 cartas, distribuidas en 13 cartas de picas, 13 de corazones, 13 de tréboles y 13 de diamantes. Las picas y los tréboles son cartas negras mientras que los corazones y los diamantes son cartas rojas. Se mezcla la baraja, se corta y se hace el siguiente experimento: coger las dos cartas que han quedado arriba del todo y observar de qué color son. Describe el espacio muestral.

4.2. Cálculo de probabilidades.

Ya hemos indicado que la probabilidad es una medida que nos indica el grado de confianza de que ocurra un determinado suceso.

La probabilidad se expresa mediante un número comprendido entre 0 y 1.

Si ese número está próximo a 0 diremos que es un suceso improbable (ojo, improbable no quiere decir que sea imposible), mientras que si está próximo a 1 diremos que ese suceso será mucho más probable.

Ejemplo

- *En una bolsa que contiene 20 bolas blancas introducimos una bola negra (indistinguible al tacto). Mezclamos bien las bolas de la bolsa, y realizamos el experimento consistente en meter la mano en la bolsa y sacar una bola.*

Sin que hayamos estudiado nada formalmente sobre probabilidad. ¿Qué piensas que es más probable, que la bola sacada es blanca o que es negra? Estaremos de acuerdo en que es más probable sacar una bola blanca.

Ahora ya sí que podemos plantearnos una pregunta: ¿En qué medida es más probable sacar una bola blanca?

No es difícil de calcular. Los datos que tenemos son los siguientes

- la bolsa tiene 21 bolas
- 1 bola es negra
- 20 bolas son blancas

La probabilidad de sacar la bola negra es 1 de entre 21. La probabilidad de sacar una bola blanca es de 20 entre 21.

Lo que acabamos de utilizar es conocido como **Ley de Laplace.** Si todos los casos de un espacio muestral son **equiprobables** (esto es, tienen la misma probabilidad de ocurrir), y S es un suceso de ese experimento aleatorio se tiene que

$$P(S) = \frac{\text{número de casos favorables al suceso } S}{\text{número de casos posibles}}$$

Ejemplo.

- *Mezclamos una baraja española de 40 cartas (los palos son oros, copas, espadas y bastos y en cada palo hay cartas numeradas del 1 al 7 además de una sota, un caballo y un rey). Se realiza el experimento consistente en cortar la baraja y quedarnos con la carta superior.*

Consideraremos los siguientes sucesos:

1) Obtener una figura
2) Obtener una carta con un número impar
3) Obtener una carta de espadas
4) Obtener una carta de espadas o una figura
5) Obtener la sota de oros

En principio las cartas no van a estar marcadas, con lo que la probabilidad de que salga cada una de ellas es la misma. Esto es, estamos ante un experimento aleatorio con todos los casos equiprobables.

1) En la baraja hay 12 figuras (3 por cada palo). Así

Casos favorables: 12 — Casos posibles: 40 — Probabilidad: 12/40= 3/10

2) Por cada palo hay 4 cartas con números impares: 1, 3, 5 y 7.

Casos favorables: 16 — Casos posibles: 40 — Probabilidad: 16/40=2/5

3) Hay 10 cartas de espadas en la baraja

Casos favorables: 10 — Casos posibles: 40 — Probabilidad: 10/40=1/4

4) Hay 10 cartas de espadas y además otras 9 figuras que no son de espadas (claro, las 3 figuras de espadas ya las hemos contado).

Casos favorables: 19 — Casos posibles: 40 — Probabilidad: 19/40

5) Solo hay una sota de oros

Casos favorables: 1 — Casos posibles: 40 — Probabilidad: 1/40

El que es capaz de calcular probabilidades rápidamente tiene ventaja en algunos juegos en los que se mezcla azar con estrategia. Por ejemplo, juegos de cartas o de dominó. Si sabemos qué cartas o fichas se han jugado podemos estimar la probabilidad de que otro jugador tenga una determinada jugada. Obviamente en esos casos no *cuantificamos* (no hacemos los cálculos exactos) pero sí que *estimamos* si tenemos la probabilidad a nuestro favor o en nuestra contra.

Para aprender más…

Jerónimo Cardano (1501-1576) fue un personaje inquieto y prolífico. Además de dedicarse a las matemáticas era médico, pero también era un jugador. De hecho él fue quin escribió el primer trabajo que se conoce sobre juegos de azar. Un siglo después el Caballero de Meré, un conocido jugador, planteó a Blas Pascal diversos problemas que le aparecían en sus partidas. Uno de los problemas que le planteó es el del reparto de las ganancias cuando una partida se tiene que interrumpir. Este problema ya había sido tratado con anterioridad por Luca Pacioli (el matemático que inventó la tabla de doble entrada para ayudar a los Medici a llevar la contabilidad de su Banca).

El problema enunciado y resuelto por Pacioli es éste:

- *Dos equipos juegan a la pelota de modo que gana el juego el primer equipo que gana 6 partidos. La apuesta es de 22 ducados, que se los llevará el ganador. Por algún motivo hay que interrumpir el juego cuando un equipo ha ganado 5 partidos y el otro 3. Se quiere saber cómo repartir los 22 ducados de la apuesta, de un modo justo.*

¡Piénsalo!

A pesar de haber pasado a la historia de las matemáticas, la solución que dio Pacioli a este problema hoy no se consideraría correcta por no tener en cuenta la probabilidad. ¿Qué propones tú? Este es un problema curioso, porque no tenemos todos los datos ni conocemos las probabilidades que intervienen en su resolución, pero es un bonito ejemplo para pensar en equipo y discutir sobre el tema. Decir qué es y qué no es justo es muy complicado.

Actividades resueltas

- *Una bolsa de bolas contiene 26 negras y 26 rojas. Se mezcla el contenido de la bolsa, se mete la mano y se saca una bola, se mira el color y se devuelve a la bolsa. A continuación se saca otra bola y se mira el color. ¿Cuál es la probabilidad de que hayan salido una bola roja y una bola negra?*

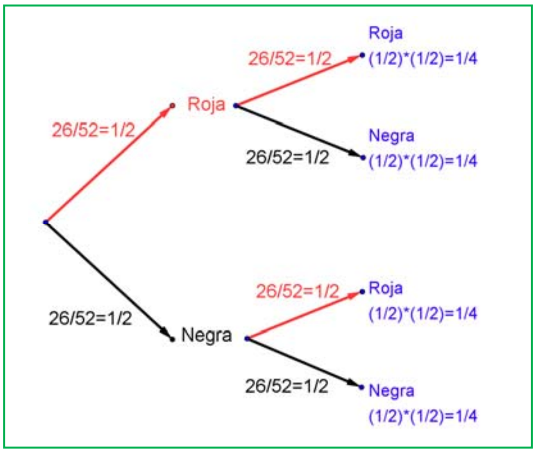
Antes de seguir leyendo, piénsalo. Si te equivocas no pasa nada: el sentido de probabilidad no lo tenemos demasiado desarrollado, pero este es el momento de hacerlo.

Este problema lo hemos planteado muchas veces a otros estudiantes. Algunos dicen que la probabilidad es 1/3 porque hay 3 casos posibles: Roja-Roja, Negra-Negra y Roja-Negra. Esa respuesta no es correcta.

En realidad el suceso *sacar una bola de cada color* consta de 2 casos Roja-Negra y Negra-Roja. Dependiendo de cómo hubiésemos escrito el espacio muestral o de cómo hubiésemos planteado el problema ese detalle se podría ver con mayor o menor claridad.

Así, la probabilidad de sacar una bola de cada color es, en realidad 1/2.

Si no te lo crees puedes hacer un experimento: será difícil que tengas 26 bolas negras y 26 bolas rojas, pero sí que es fácil que tengas una baraja francesa. Mézclala, corta y mira el color de la carta que ha quedado arriba en el montón. Apúntalo. Vuelve a dejar las cartas en el mazo, vuelve a mezclar, corta de nuevo y mira el color de la carta que ha quedado arriba ahora. Apunta los colores. Repite este experimento muchas veces: 20, 50 o 100.



Si tienes en cuenta los resultados verás que, aproximadamente, la mitad de las veces las dos cartas son del mismo color y la otra mitad las cartas son de colores diferentes. Con eso, hemos podido "comprobar" que la probabilidad de ese suceso era 1/2.

Otra forma que te puede ayudar a razonar sobre este problema, y otros muchos de probabilidad, es confeccionar un **diagrama en árbol**. La primera bola que sacamos tiene una probabilidad de ser Roja igual a 26/52 = 1/2. Ese número lo escribimos en la rama del árbol. Si devolvemos a la bolsa la bola y volvemos a sacar otra bola de la bolsa, la probabilidad de que sea Roja vuelve a ser 26/52 = 1/2. Completamos con idéntico razonamiento el resto de las ramas.

La probabilidad de que las dos bolas que hayamos sacado sean rojas es el producto de sus ramas: (1/2)·(1/2) = 1/4. Igual probabilidad obtenemos para los sucesos Negra-Negra, Negra-Roja y Roja-Negra. La probabilidad de Roja-Negra es por tanto 1/4, igual a la de Negra-Roja. Como son sucesos elementales la probabilidad de que las dos bolas sean de distinto color es la suma: 1/4 + 1/4 = 1/2.

4.3. Probabilidad y frecuencia relativa

Al principio del capítulo, cuando introducíamos los principales conceptos estadísticos, hablábamos de la frecuencia. A esa frecuencia se le llama **frecuencia absoluta** para distinguirla de otro concepto, que es mucho más próximo a la probabilidad.

Llamaremos **frecuencia relativa** de un resultado de un experimento aleatorio a su frecuencia absoluta dividido entre el número de repeticiones del experimento.

Ejemplo

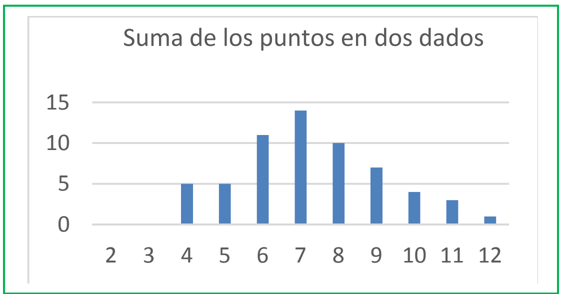
- *Tira un dado 60 veces, copia esta tabla en tu cuaderno y apunta lo que sale:*

Si dibujas un diagrama de barras con los resultados del experimento obtendrás algo parecido a esto:

La frecuencia relativa de cada uno de los casos es bastante parecida a la probabilidad de ese caso (que es 1/6).

Ejemplo.

- *Haz ahora otro experimento: tira 2 dados 60 veces y apunta la suma de los valores de los dos dados en esta tabla. Tira un dado 60 veces, copia esta tabla en tu cuaderno y apunta lo que sale:*



Dibuja ahora un diagrama de barras. Lo que obtendrás será algo parecido a esto:

Si la probabilidad "se tiene que parecer" a las frecuencias relativas, en este caso vemos que el suceso *que la suma dé 7* es más probable que cualquiera de los demás. Y mucho más probable *que la suma de 2* o *que la suma de 12*.

La **ley de los grandes números** nos dice que cuando se repite muchas veces un experimento aleatorio la frecuencia relativa de cada suceso S se aproxima a su probabilidad. Cuanto más grande sea el número de repeticiones, mejor va siendo la aproximación.

En este caso lo útil es utilizar las frecuencias relativas para estimar probabilidades cuando éstas no son conocidas.

Actividades propuestas

11. En algunos lugares de España se sigue jugando a la taba. La taba es un hueso de cordero que no es regular. Puede caer en cuatro posiciones distintas. Podemos pensar en ella como si fuese un dado "raro".
12. Considera el experimento "lanzar la goma al aire y ver lo que marca su cara superior".
13. Aproxima la probabilidad de cada uno de los casos de este experimento aleatorio.
14. Tu calculadora probablemente tendrá una función que sirve para generar números aleatorios. Normalmente da un número comprendido entre 0 y 1.

(Imagen: Wikimedia Commons)

15. Realiza el experimento aleatorio "genera un número aleatorio y apunta su segundo decimal". Haz 40 repeticiones de este experimento. Dibuja un histograma de frecuencias.
16. La probabilidad no es un concepto intuitivo. Para ello vamos a hacer una prueba. Consideraremos el experimento aleatorio *lanzar una moneda*. Copia la tabla en tu cuaderno.

- Escribe en la 1ª fila de esta tabla lo que tú crees que saldría al repetir el experimento 30 veces. Piénsalo y rellena la tabla. Como tú quieras (invéntatelo, pero "con sentido").
- En la 2ª fila de la tabla escribe el resultado real de 30 lanzamientos de la moneda.

¿Qué observas en ambos casos? ¿Alguna pauta? Presta atención a estas cuestiones para cada una de las filas de la tabla.

¿Hay más o menos 15 caras y 15 cruces?

¿Aparecen grupos seguidos de caras o de cruces?

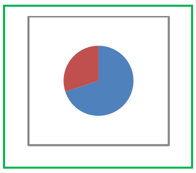
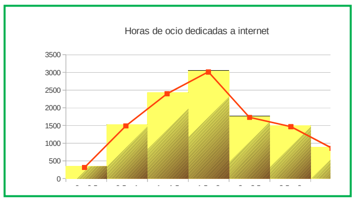
¿Cuál es el mayor número de caras que han salido seguidas? ¿Y el de cruces?

Normalmente cuando "te inventas" los resultados sí sueles poner la mitad de caras y la mitad de cruces. En un experimento aleatorio estos números están cerca de la mitad pero no suelen ser la mitad exacta.

Cuando te lo inventas, en general pones pocos grupos seguidos de caras o cruces.

El cerebro nos engaña y en temas probabilísticos tenemos que educarlo mucho más. Por eso este tema es muy importante, aunque sea el que muchas veces se queda sin dar. Nos ayuda a que, como ciudadanos, no nos engañen. Ni con loterías, ni con cartas, ni con estadísticas electorales.

RESUMEN

Población	Colectivo sobre el que se hace el estudio	Estudiantes de todo Madrid
Muestra	Subconjunto de la población que permita obtener características de la población complete.	Alumnos se 3º de ESO seleccionados
Individuo	Cada uno de los elementos de la población o muestra	Juan Pérez
Variables estadística	Cuantitativa discreta Cuantitativa continua Cualitativa	Número de pie que calza Estatura Deporte que practica
Gráficos estadísticos	Diagrama de barras Histograma de frecuencias Polígono de frecuencias Diagrama de sectores 	
Media	$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$ = $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/n$	Con los datos: 8, 2, 5, 10 y 10 *Media* = 35/5 = 7
Moda	Es el valor más frecuente	*Mo* = 10
Mediana	Deja por debajo la mitad	4 < 6 < 8 < 10 = 10. *Me* = 8.
Rango o recorrido	Es la diferencia entre el dato mayor y el dato menor.	10 – 2 = 8
Desviación media	Es la media de las distancias de los datos a la media de los datos de los que dispongamos.	(|8–7|+|2–7|+|5–7|+|10–7| + |10–7|)/5 = (1+5+2+3+3)/5 = 14/5 = DM
Varianza	Es la media de los cuadrados de las distancias de los datos a la media: $\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2}{n} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - m^2}$	V = (1 + 25 + 4 + 9 + 9)/5 = 47/5 = 9,4
Desviación típica	Es la raíz cuadrada de la varianza.	$\sigma = \sqrt{47/5} = 3{,}06$
Probabilidad	Valor entre 0 y 1 que nos da una medida de lo factible que sea que se verifique un determinado suceso.	P(3) = 1/6 al tirar un dado
Espacio muestral	El conjunto de todos los casos posibles	{1, 2, 3, 4, 5, 6}
Suceso	Subconjunto del espacio muestral	Sacar par: {2, 4, 6}
Ley de Laplace.	$P(S) = \frac{\text{número de casos favorables al suceso } S}{\text{número de casos posibles}}$	*P*(par) = 3/6 = 1/2.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

Estadística

1. Se han recogido los datos sobre el número de hijos que tienen 20 matrimonios. ¿Cómo es la variable utilizada? Escribe una tabla de frecuencias de los datos recogidos y representa los datos en un diagrama de sectores:

   3, 1, 1, 2, 0, 2, 3, 1, 1, 1, 1, 0, 3, 2, 1, 2, 1, 2, 2, 3.

2. Con los datos del problema anterior calcula la media, la mediana, la moda y los cuartiles.
3. Con los datos del problema anterior calcula el rango, la deviación media, la varianza la desviación típica y el intervalo intercuartílico..

Autor: Fernando Blasco
Revisor: Andrés Hierro
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

4. Representa esos datos en un diagrama de cajas.
5. La siguiente tabla expresa las estaturas, en metros, de 1000 soldados:

Talla	1'50 - 156	1'56 – 1'62	1'62 - 168	1'68 - 1'74	1'74 - 1'80	1'80-1'92
Nº de soldados	10	140	210	340	210	90

a) Representa los datos en un histograma.
b) Calcula la media y la desviación típica.
c) Determina el intervalo donde se encuentran la mediana.

6. Se pregunta a un grupo de personas por el número de televisores que hay en su hogar y los resultados son:

Número de televisores	0	1	2	3	4	5
Número de hogares	2	27	15	4	2	1

¿Qué tipo de variables es? Representa los datos en la representación que te parezca más adecuada. Calcula la media y la desviación típica-

7. Con los datos del problema anterior calcula la mediana y el intervalo intercuartílico.
8. En un centro escolar se ha recogido información sobre el número de ordenadores en las casas de 100 familias y se han obtenido los siguientes resultados:

Número ordenadores	0	1	2	3	4
Número de familias:	24	60	14	1	1

Representa los datos en un diagrama de barras y calcula la media, la mediana y la moda.

9. Con los datos del problema anterior calcula el rango, la desviación media, la varianza y la desviación típica. Haz un diagrama de cajas.
10. Se pregunta a un grupo de personas por el número de veces que han visitado al dentista en el último año. Las respuestas obtenidas se recogen en la siguiente tabla:

Número de visitas:	1	2	3	4	5
Número de personas:	13	18	7	5	7

Representa los datos en un diagrama de sectores y calcula la media, la mediana y la moda.

11. Se pregunta a un grupo de personas por el número de veces que han visitado al dentista en el último año. Las respuestas obtenidas se recogen en la siguiente tabla:

Número de visitas:	1	2	3	4	5
Número de personas:	13	18	7	5	7

Calcula el rango, la desviación media, la varianza y la desviación típica.

12. En las elecciones de 2014 al Parlamento Europeo se obtuvieron los siguientes escaños por grupo parlamentario (DM: demócrata – cristianos; S: socialistas; L: Liberales; V: verdes; C: conservadores; I: izquierda unitaria; LD: Libertad y democracia; NI: No inscritos; Otros).

Partidos	DM	S	L	V	C	I	LD	NI	Otros	Total
Escaños	213	190	64	52	46	42	38	41	65	751

¿Qué representación de los datos te parece más adecuada? ¿Puedes calcular la media o el rango? ¿Qué tipo de variables es la de la tabla?

13. En las elecciones de 2014 al Parlamento Europeo se obtuvieron los siguientes escaños por alguno de los estados miembro:

Estado	Alemania	España	Francia	Italia	Polonia	Reino Unido	Portugal	Grecia	Otros	Total
Escaños	96	54	74	73	51	73	21	21		751

¿Qué representación de los datos te parece más adecuada? ¿Puedes calcular la media o el rango? ¿Qué tipo de variables es la de la tabla? Determina el número de escaños de los otros países miembros de la Unión Europea.

14. En las elecciones de 2004, 2009, 2014 al Parlamento Europeo se obtuvieron los siguientes porcentajes de votos por algunos de los estados miembros:

Estado	Alemania	España	Francia	Italia	Reino Unido	Portugal	Grecia	Bélgica	% total
2004	43	45'14	42'76	71'72	38'52	38'6	63'22	90'81	45'47
2009	43'27	44'87	40'63	65'05	34'7	36'77	52'61	90'39	43
2014	47'6	45'9	43'5	60	36	34'5	58'2	90	43'09

¿Qué representación de los datos te parece más adecuada? ¿Puedes calcular la media o el rango? ¿Qué tipo de variables es la de la tabla? Ordena a los países de mayor a menos porcentaje de votantes en las elecciones de 2014.

15. Con los datos del problema anterior sobre las elecciones de 2004, 2009, 2014 al Parlamento Europeo se obtuvieron los siguientes porcentajes de votos por algunos de los estados miembros:

Estado	Alemania	España	Francia	Italia	Reino Unido	Portugal	Grecia	Bélgica	% total
2004	43	45'14	42'76	71'72	38'52	38'6	63'22	90'81	45'47
2009	43'27	44'87	40'63	65'05	34'7	36'77	52'61	90'39	43
2014	47'6	45'9	43'5	60	36	34'5	58'2	90	43'09

Representa en un polígono de frecuencias los porcentajes de participación del total de los estados miembros.

16. Con los datos del problema anterior sobre las elecciones de 2004, 2009, 2014 al Parlamento Europeo se obtuvieron los siguientes porcentajes de votos por algunos de los estados miembros:

Estado	Alemania	España	Francia	Italia	Reino Unido	Portugal	Grecia	Bélgica	% total
2004	43	45'14	42'76	71'72	38'52	38'6	63'22	90'81	45'47
2009	43'27	44'87	40'63	65'05	34'7	36'77	52'61	90'39	43
2014	47'6	45'9	43'5	60	36	34'5	58'2	90	43'09

Separa los Estados Miembros en dos grupos los que tuvieron un porcentaje superior al porcentaje medio y los que lo tuvieron menor en 2004. Haz lo mismo para 2014. ¿Son los mismos? Analiza el resultado.

17. Con los datos del problema anterior sobre las elecciones de 2004, 2009, 2014 al Parlamento Europeo se obtuvieron los siguientes porcentajes de votos por algunos de los estados miembros:

Estado	Alemania	España	Francia	Italia	Reino Unido	Portugal	Grecia	Bélgica	% total
2004	43	45'14	42'76	71'72	38'52	38'6	63'22	90'81	45'47
2009	43'27	44'87	40'63	65'05	34'7	36'77	52'61	90'39	43
2014	47'6	45'9	43'5	60	36	34'5	58'2	90	43'09

Calcula el porcentaje de participación medio para Alemania en esas tres convocatorias y la desviación típica. Lo mismo para España, para Bélgica y para Portugal.

18. En las elecciones de 2014 al Parlamento Europeo los resultados de España han sido:

Censo	Total de votantes	Abstención	Votos nulos	Votos en blanco
35.379.097	15.920.815	18.810,754	290.189	357.339

Representa en un diagrama de sectores estos datos. Haz una tabla de porcentajes: el censo es el 100 %. Determina los otros porcentajes. ¿Consideras que ha ganado la abstención?

19. En las elecciones de 2014 al Parlamento Europeo los resultados de España han sido:

PP	PSOE	Izquierda plural	Podemos	UPyD	Otros	Total de votantes
4.074.363	7.901.754	1.562.567	1.245.948	1.015.994		15.920.815

Determina el número de votos de los otros partidos. Representa en un diagrama de barras estos datos. Haz una tabla de porcentajes para cada partido. Tienes que distribuir 54 escaños, ¿cómo los distribuirías por partidos?

Probabilidad

20. Se considera el experimento aleatorio de tirar un dado dos veces. Calcula las probabilidades siguientes:
a) Sacar algún 1. b) La suma de los dígitos es 8. c) No sacar ningún 2. d) Sacar algún 1 o bien no sacar ningún 2.

21. Se considera el experimento aleatorio sacar dos cartas de la baraja española. Calcula la probabilidad de:
a) Sacar algún rey. b) Obtener al menos un basto. c) No obtener ningún basto.
d) No obtener el rey de bastos. e) Sacar alguna figura: sota, caballo, rey o as. f) No sacar ninguna figura.

22. Se considera el experimento aleatorio de tirar una moneda tres veces. Calcula las probabilidades siguientes:
a) Sacar cara en la primera tirada. b) Sacar cara en la segunda tirada. c) Sacar cara en la tercera tirada.
d) Sacar alguna cara. c) No sacar ninguna cara. d) Sacar tres caras.

23. Con una baraja española se hace el experimento de sacar tres cartas, con reemplazo, ¿cuál es la probabilidad de sacar tres reyes? Y si el experimento se hace sin reemplazo, ¿cuál es ahora la probabilidad de tener 3 reyes?

24. En una urna hay 6 bolas blancas y 14 bolas negras. Se sacan dos bolas con reemplazo. Determina la probabilidad de que:
a) Las dos sean negras. b) Haya al menos una negra. c) Ninguna sea negra.

25. En una urna hay 6 bolas blancas y 14 bolas negras. Se sacan dos bolas sin reemplazo. Determina la probabilidad de que:
a) Las dos sean negras. b) Haya al menos una negra. c) Ninguna sea negra.
d) Compara los resultados con los de la actividad anterior.

26. Al lanzar cuatro monedas al aire,
    a) ¿cuál es la probabilidad de que las cuatro sean caras?
    b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener a lo sumo tres caras?
    c) ¿Cuál es la probabilidad de tener exactamente 3 caras?
27. Dos tiradores al plato tienen unas marcas ya conocidas. El primero acierta con una probabilidad de 0,7 y el segundo de 0,5. Se lanza un plato y ambos disparan. Expresa mediante un diagrama de árbol y las distintas posibilidades: a) ¿Qué probabilidad hay de que uno de los tiradores dé en el plato? b) Calcula la probabilidad de que ninguno acierte. c) Calcula la probabilidad de que los dos acierten.
28. Se lanza una moneda hasta que aparezca cara dos veces seguidas. a) Calcula la probabilidad de que la experiencia termine en el segundo lanzamiento. b) Calcula la probabilidad de que termine en el tercer lanzamiento.
29. En el lanzamiento de naves espaciales se han instalado tres dispositivos de seguridad A, B y C. Si falla A se pone automáticamente en marcha el dispositivo B, y si falla este, se pone en marcha C. Se sabe que la probabilidad de que falle A es 0,1, la probabilidad de que B funcione es 0,98 y la probabilidad de que falle C es 0,05. Calcula la probabilidad de que todo funcione bien.
30. Se hace un estudio sobre los incendios forestales de una zona y se comprueba que el 40 % son intencionados, el 50 % se deben a negligencias y el 10 % a causas naturales. Se han producido tres incendios, a) ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno haya sido intencionado? b) Probabilidad de que los tres incendios se deban a causas naturales. c) Probabilidad de que ningún incendio sea por negligencias.
31. Se lanza dos veces un dado equilibrado con seis caras. Hallar la probabilidad de que la suma de los valores que aparecen en la cara superior sea múltiplo de tres.
32. Se sabe que se han eliminado varias cartas de una baraja española que tiene cuarenta. La probabilidad de extraer un as entre las que quedan 0,12, la probabilidad de que salga una copa es 0,08 y la probabilidad de que no sea ni as ni copa es 0.84. Calcular la probabilidad de que la carta sea el as de copas. ¿Se puede afirmar que entre las cartas que no se han eliminado está el as de copas?
33. Una persona despistada tiene ocho calcetines negros, seis azules y cuatro rojos, todos ellos sueltos. Un día con mucha prisa, elige dos calcetines al azar. Hallar la probabilidad de:
    a) que los calcetines sean negros. b) que los dos calcetines sean del mismo color.
    c) que al menos uno de ellos sea rojo. d) que uno sea negro y el otro no.
34. Tres personas viajan en un coche. Si se supone que la probabilidad de nacer en cualquier día del año es la misma y sabemos que ninguno ha nacido en un año bisiesto. A) Hallar la probabilidad de que solamente una de ellas celebre su cumpleaños ese día. B) Calcular la probabilidad de que al menos dos cumplan años ese día.

AUTOEVALUACIÓN

1. Se hace un estudio sobre el color que prefieren los habitantes de un país para un coche. La variable utilizada es:
   a) cuantitativa b) cualitativa c) cuantitativa discreta d) cuantitativa continua
2. En un histograma de frecuencias la altura de los rectángulos es:
   a) proporcional al área b) igual a la frecuencia absoluta
   c) proporcional a la frecuencia relativa d) proporcional a la frecuencia acumulada
3. Ana ha obtenido en Matemáticas las siguientes notas: 7, 8, 5, 10, 8, 10, 9 y 7. Su nota media es de:
   a) 7,6 b) 8,2 c) 8 d) 9
4. En las notas anteriores de Ana la mediana es: a) 9 b) 8 c) 7,5 d) 8,5
5. En las notas anteriores de Ana la moda es: a) 10 b) 8 c) 7 d) 7, 8 y 10
6. El espacio muestral de sucesos elementales equiprobables del experimento “tirar dos monedas y contar el número de caras” es: a) {2C, 1C, 0C} b) {CC, CX, XC, XX} c) {XX, XC, CC} d) {CC, CX, XC, CC}
7. Tiramos dos dados y contamos los puntos de las caras superiores. La probabilidad de que la suma sea 7 es:
   a) 1/6 b) 7/36 c) 5/36 d) 3/36
8. Al sacar una carta de una baraja española (de 40 cartas), la probabilidad de que sea un oro o bien un rey es:
   a) 14/40 b) 13/40 c) 12/40 d) 15/40
9. En una bolsa hay 7 bolas rojas, 2 negras y 1 bola blanca. Se sacan 2 bolas. La probabilidad de que las dos sean rojas es: a) 49/100 b) 42/100 c) 49/90 d) 7/15
10. Tiramos tres monedas al aire. La probabilidad de que las tres al caer sean caras es:
    a) 1/5 b) 1/7 c) 1/8 d) 1/6

Autor: Fernando Blasco
Revisor: Andrés Hierro
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF